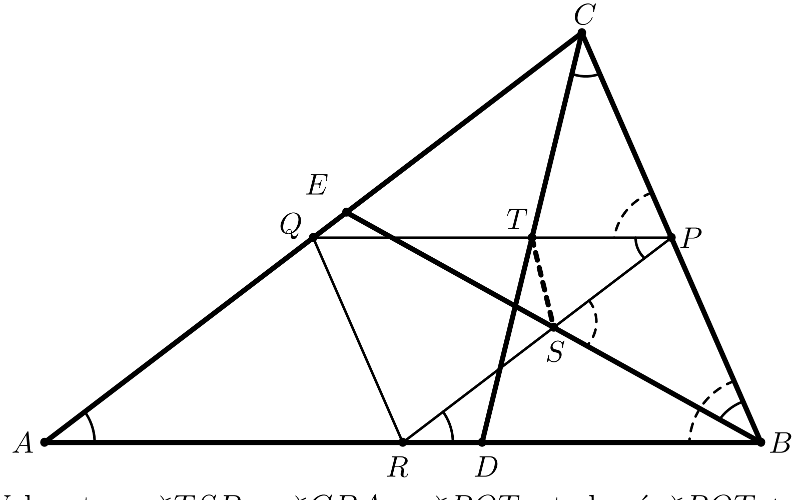
# LXVI Olimpiada Matematyczna

**Rozwiązania zadań konkursowych**
**zawodów stopnia trzeciego**
13 kwietnia 2015 r. (pierwszy dzień zawodów)

*Zadanie* **1.** W trójkącie $ABC$ kąt przy wierzchołku $A$ jest najmniejszy. Punkty $D$ i $E$ leżą odpowiednio na bokach $AB$ i $AC$, przy czym $\sphericalangle CBE = \sphericalangle DCB = \sphericalangle BAC$. Wykazać, że środki odcinków $AB, AC, BE, CD$ leżą na jednym okręgu.

*Rozwiązanie*

Oznaczmy przez $P$, $Q$, $R$, $S$, $T$ kolejno środki odcinków $BC$, $CA$, $AB$. $BE$, $CD$. Z twierdzenia Talesa wynika, że $PQ \parallel BA$, $QR \parallel CB$, $RP \parallel AC$. Punkt wspólny odcinka $CD$ i prostej $PQ$ jest więc środkiem odcinka $CD$, zatem jest to punkt $T$. Podobnie punkt $S$ jest punktem wspólnym odcinka $BE$ i prostej $PR$. Wynika stąd, że punkty $Q$, $R$, $S$ i $T$ — w tej kolejności — są wierzchołkami czworokąta wypukłego. Poza tym $\sphericalangle ABC = \sphericalangle TPC$, $\sphericalangle SPB = \sphericalangle ACB$. Stąd i założenia $\sphericalangle CAB = \sphericalangle DCB = \sphericalangle CBE$ wynika, że trójkąty $ABC$, $BSP$ i $CPT$ mają odpowiednio równe kąty, więc są podobne. Stąd zaś wynikają równości $\frac{PS}{PB} = \frac{CB}{CA}$ i $\frac{PT}{PC} = \frac{BC}{BA}$. Po podzieleniu tych równości stronami i uwzględnieniu równości $PB = PC$ otrzymujemy wzór $\frac{PS}{PT} = \frac{BA}{CA}$, który w połączeniu z równością $\sphericalangle BAC = \sphericalangle SPT$ (wynikającą z tego, że czworokąt $QARP$ jest równoległobokiem) pozwala stwierdzić, że trójkąt $SPT$ jest podobny do trójkąta $BAC$.




Wobec tego $\sphericalangle TSP = \sphericalangle CBA = \sphericalangle RQT$, stąd zaś $\sphericalangle RQT + \sphericalangle RST = \sphericalangle RQT + 180^\circ - \sphericalangle TSP = 180^\circ$, a to pozwala stwierdzić, że na czworokącie $QRST$ można opisać okrąg, co mieliśmy udowodnić.

*Zadanie* **2.** Niech $P$ będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych. Udowodnić, że jeśli dla pewnej liczby całkowitej $k$ liczba $P(k)$ nie jest całkowita, to istnieje nieskończenie wiele takich liczb całkowitych $m$, dla których liczba $P(m)$ nie jest całkowita.

*Rozwiązanie*

Niech $A_P$ będzie zbiorem złożonym z tych liczb całkowitych $k$, dla których liczba $P(k)$ nie jest całkowita. Załóżmy, że teza nie jest prawdziwa. Wtedy zbiór $A_P$, z założenia niepusty, ma skończenie wiele elementów. Niech $P$ będzie wielomianem najniższego stopnia, dla którego teza jest nieprawdziwa, czyli dla którego zbiór $A_P$ jest niepusty i skończony. Niech $k_0$ będzie największą liczbą w zbiorze $A_P$, a $k_1$ — najmniejszą. Niech $Q(x) = P(x+1) - P(x)$. Stopień wielomianu $Q$ jest o 1 mniejszy od stopnia wielomianu $P$. Liczba $Q(k_0)$ nie jest całkowita (jako różnica liczby całkowitej $P(k_0+1)$ i niecałkowitej $P(k_0)$), zatem $k_0 \in A_Q$. Z definicji $k_0$ i $k_1$ wynika, że jeśli $m$ jest liczbą całkowitą i $m > k_0$ lub $m < k_1 - 1$, to $Q(m)$ też jest całkowite jako różnica liczb całkowitych, więc $m \notin A_Q$ . Przeczy to temu, że $P$ jest wielomianem najniższego stopnia, dla którego zbiór $A_P$ jest niepusty i skończony.

*Uwaga.* Niech $P$ będzie wielomianem stopnia $d$. Niech $P_1(x) = P(x+1) - P(x)$. $P_1$ jest wielomianem stopnia $d-1$. Niech $P_{j+1} = P_j(x+1) - P_j(x)$ dla $j = 1, 2, \ldots, d-1$. Jasne jest, że $P_2$ jest wielomianem stopnia $d-2$, $P_3$ — wielomianiem stopnia $d-3$, itd. Wobec tego $P_d$ jest wielomianem stopnia 0, czyli stałą. Wynika stąd natychmiast, że jeśli wielomian stopnia $d$ przyjmuje wartości całkowite dla $d+1$ kolejnych liczb całkowitych, to jedyna wartość wielomianu $P_d$ jest całkowita. Istnieje taka liczba całkowita $m$, że $P_{d-1}(m)$ jest całkowite. Stąd wynika, że wszystkie wartości wielomianu $P_{d-1}$, przyjmowane w punktach całkowitych, są całkowite: $P_{d-1}(m+1) = P_{d-1}(m) + P_d(m)$, $P_{d-1}(m+2) = = P_{d-1}(m+1) + P_d(m)$ itd. oraz $P_{d-1}(m-1) = P_{d-1}(m) - P_d(m)$, $P_{d-1}(m-2) = P_{d-1}(m-1) - P_d(m)$ itd. Stąd wynika, że taką samą własność ma wielomian $P_{d-2}$, bo $P_{d-2}(n+1) = P_{d-2}(n) + P_{d-1}(n)$, itd. (formalnie znów rozumowanie indukcyjne).

*Zadanie* **3.** Znaleźć największą liczbę naturalną $m$ o następującej własności: wśród pięciu dowolnie wybranych podzbiorów 500-elementowych zbioru $\{1, 2, \ldots, 1000\}$ istnieją dwa zbiory, których część wspólna liczy co najmniej $m$ elementów.

*Rozwiązanie*

Wykażemy najpierw, że $m \geqslant 200$. Niech $A_1, A_2, A_3, A_4$ i $A_5$ będą podzbiorami 500–elementowymi zbioru $\{1, 2, \ldots, 1000\}$. Niech $a_{i,j} = 1$, gdy $i \in A_j$ oraz $a_{i,j} = 0$ w przeciwnym przypadku. Dla każdego $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ zachodzi więc równość $a_{1,j} + a_{2,j} + \ldots + a_{1000,j} = 500$. Niech $s_i = a_{i,1} + a_{i,2} + a_{i,3} + a_{i,4} + a_{i,5}$ dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots, 1000\}$. Wtedy $s_1 + s_2 + \ldots + s_{1000} = 2500$. Dla każdej liczby $i \in \{1, 2, \ldots, 1000\}$ zachodzi równość:

$$s_i^2 = a_{i,1}^2 + a_{i,2}^2 + a_{i,3}^2 + a_{i,4}^2 + a_{i,5}^2 + {}$$
$$+ 2(a_{i,1}a_{i,2} + a_{i,1}a_{i,3} + a_{i,1}a_{i,4} + a_{i,1}a_{i,5} + a_{i,2}a_{i,3} + \ldots + a_{i,4}a_{i,5}) =$$
$$\underset{\text{dla każdej pary}(i,j)}{\overset{a_{i,j}^2 = a_{i,j}}{=\!=\!=\!=\!=}} a_{i,1} + a_{i,2} + a_{i,3} + a_{i,4} + a_{i,5}$$
$$+ 2(a_{i,1}a_{i,2} + a_{i,1}a_{i,3} + a_{i,1}a_{i,4} + a_{i,1}a_{i,5} + a_{i,2}a_{i,3} + \ldots + a_{i,4}a_{i,5}) =$$
$$= s_i + 2(a_{i,1}a_{i,2} + a_{i,1}a_{i,3} + a_{i,1}a_{i,4} + a_{i,1}a_{i,5} + a_{i,2}a_{i,3} + \ldots + a_{i,4}a_{i,5}).$$

Wobec tego

$$2(a_{i,1}a_{i,2} + a_{i,1}a_{i,3} + a_{i,1}a_{i,4} + a_{i,1}a_{i,5} + a_{i,2}a_{i,3} + \ldots + a_{i,4}a_{i,5}) = s_i^2 - s_i.$$

Jeśli $i \in A_j \cap A_k$, to $a_{i,j}a_{i,k} = 1$, a gdy $i \notin A_j \cap A_k$, to $a_{i,j}a_{i,k} = 0$. Wobec tego $|A_j \cap A_k| = a_{1,j}a_{1,k} + a_{2,j}a_{2,k} + \ldots + a_{1000,j}a_{1000,k}$, gdzie $|B|$ oznacza liczbę elementów zbioru $B$. Stąd wynika równość

$$|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \cdots + |A_4 \cap A_5| =$$
$$= \tfrac{1}{2}(s_1^2 - s_1 + s_2^2 - s_2 + \ldots + s_{1000}^2 - s_{1000}) =$$
$$= \tfrac{1}{2}\big((s_1 - 2)(s_1 - 3) + (s_2 - 2)(s_2 - 3) + \ldots + (s_{1000} - 2)(s_{1000} - 3)\big) +$$
$$+ \tfrac{1}{2}\big(4s_1 - 6 + 4s_2 - 6 + \ldots + 4s_{1000} - 6\big) =$$
$$= \tfrac{1}{2}\big((s_1 - 2)(s_1 - 3) + \ldots + (s_{1000} - 2)(s_{1000} - 3)\big) + \tfrac{1}{2}(4 \cdot 2500 - 6 \cdot 1000) =$$
$$= \tfrac{1}{2}\big((s_1 - 2)(s_1 - 3) + \ldots + (s_{1000} - 2)(s_{1000} - 3)\big) + 2000.$$

Ponieważ $s_i$ jest liczbą całkowitą, więc $(s_i - 2)(s_i - 3) \geqslant 0$. Wykazaliśmy, że $|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \cdots + |A_4 \cap A_5| \geqslant 2000$. Wynika stąd, że dla pewnej pary $(j, k)$ zachodzi nierówność $|A_j \cap A_k| \geqslant \frac{1}{10} \cdot 2000 = 200$. Wykazaliśmy, że $m \geqslant 200$.

Zdefiniujemy takie zbiory $A_1, \ldots, A_5$, że $|A_j \cap A_k| \geqslant 200$. Tym samym wykażemy, że minimalną wartością liczby $m$ jest 200. Ponieważ liczby $a_{i,j}$, $1 \leqslant i \leqslant 1000$, $1 \leqslant j \leqslant 5$, jednoznacznie definiują zbiory $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$, więc wystarczy je określić tak, by $a_{1,j} + a_{2,j} + \ldots + a_{1000,j} = 500$ (zbiór $A_j$ ma mieć 500 elementów) i by $a_{1,j}a_{1,k} + a_{2,j}a_{2,k} + \ldots + a_{1000,j}a_{1000,k} = 200$ (zbiór $A_j \cap A_k$ ma mieć 200 elementów). Ostatnia nierówność dowodu staje się równością wtedy i tylko wtedy, gdy $(s_i - 2)(s_i - 3) = 0$ dla każdego $i$, czyli gdy $s_i \in \{2, 3\}$. Liczby $a_{i,j}$ będą tak zdefiniowane, że wśród liczb $s_1, s_2, \ldots, s_{1000}$ liczba 3 pojawi się 500 razy i tyleż razy pojawi się liczba 2. Definiujemy

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $a_{1,1} = 1$ | $a_{1,2} = 1$ | $a_{1,3} = 1$ | $a_{1,4} = 0$ | $a_{1,5} = 0$ |
| $a_{2,1} = 0$ | $a_{2,2} = 1$ | $a_{2,3} = 1$ | $a_{2,4} = 1$ | $a_{2,5} = 0$ |
| $a_{3,1} = 0$ | $a_{3,2} = 0$ | $a_{3,3} = 1$ | $a_{3,4} = 1$ | $a_{3,5} = 1$ |
| $a_{4,1} = 1$ | $a_{4,2} = 0$ | $a_{4,3} = 0$ | $a_{4,4} = 1$ | $a_{4,5} = 1$ |
| $a_{5,1} = 1$ | $a_{5,2} = 1$ | $a_{5,3} = 0$ | $a_{5,4} = 0$ | $a_{5,5} = 1$ |
| $a_{6,1} = 1$ | $a_{6,2} = 0$ | $a_{6,3} = 1$ | $a_{6,4} = 0$ | $a_{6,5} = 0$ |
| $a_{7,1} = 0$ | $a_{7,2} = 1$ | $a_{7,3} = 0$ | $a_{7,4} = 1$ | $a_{7,5} = 0$ |
| $a_{8,1} = 0$ | $a_{8,2} = 0$ | $a_{8,3} = 1$ | $a_{8,4} = 0$ | $a_{8,5} = 1$ |
| $a_{9,1} = 1$ | $a_{9,2} = 0$ | $a_{9,3} = 0$ | $a_{9,4} = 1$ | $a_{9,5} = 0$ |
| $a_{10,1} = 0$ | $a_{10,2} = 1$ | $a_{10,3} = 0$ | $a_{10,4} = 0$ | $a_{10,5} = 1$ |

Kończymy definiowanie pisząc $a_{10+i,j} = a_{i,j}$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, 990\}$, $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, czyli powtarzamy napisane dziesięć wierszy 100 razy. Otrzymujemy więc wzory $A_1 = \{1, 4, 5, 6, 9, 11, 14, 15, 16, 19, \ldots\}$, $A_2 = \{1, 2, 5, 7, 10, 11, 12, 15, 17, 20, \ldots\}$, itd. Jasne jest, że $|A_j| = 500$ dla $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ oraz $|A_j \cap A_k| = 200$ dla $j, k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $j < k$.

*Uwaga.* Jeśli $s_1, s_2, \ldots, s_{1000} \in \mathbb{R}$ i $s_1 + s_2 + \ldots + s_{1000} = 2500$, to ponieważ funkcja $x^2 - x$ jest ściśle wypukła, więc (nierówność Jensena)

$$s_1^2 - s_1 + s_2^2 - s_2 + \ldots + s_{1000}^2 - s_{1000} \geqslant$$
$$\geqslant 1000\Big(\big(\tfrac{s_1 + s_2 + \ldots + s_{1000}}{1000}\big)^2 - \big(\tfrac{s_1 + s_2 + \ldots + s_{1000}}{1000}\big)\Big) = 1000(2{,}5^2 - 2{,}5) = 3750$$

przy czym równośc zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $s_i = 2,5$ dla każdego $i$. W zadaniu szacowaliśmy tę sumę (2000 składników) zakładając, że liczby $s_1, s_2, \ldots, s_{1000}$ są całkowite. Całkowitymi sąsiadami liczby 2,5 są liczby 2 i 3. Stąd pomysł użycia równości $s^2 - s = (s - 2)(s - 3) + 4s - 6$.

# LXVI Olimpiada Matematyczna

**Rozwiązania zadań konkursowych**
**zawodów stopnia trzeciego**

14 kwietnia 2015 r. (drugi dzień zawodów)

*Zadanie* **4.** Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^5+y^5+z^5=1 \end{cases}$$

w liczbach rzeczywistych $x, y, z$.

*Rozwiązanie pierwsze* Każda z trójek postaci $(t,-t,1)$, $(t,1,-t)$, $(1,t,-t)$ jest rozwiązaniem układu równań. Załóżmy teraz, że trójka $(x,y,z)$ jest rozwiązaniem. Ze względu na symetrię układu możemy założyć, że $z \leqslant 1$ oraz $x \geqslant y$. Wtedy $x+y=1-z \geqslant 0$. Załóżmy, że dla pewnego $r>0$ również trójka $(x+r, y-r, z)$ jest rozwiązaniem układu. Wtedy $1-z^5=(x+r)^5+(y-r)^5=x^5+y^5+5r(x^4-y^4)+10r^2(x^3++y^3)+10r^3(x^2-y^2)+5r^4(x+y)=1-z^5+5r(x-y)(x+y)(x^2++y^2)+10r^2(x+y)(x^2-xy+y^2)+10r^3(x-y)(x+y)+5r^4(x+y)==1-z^5+5r(x-y)(x+y)(x^2+y^2)+5r^2(x+y)((x-y)^2+x^2+y^2)++10r^3(x-y)(x+y)+5r^4(x+y) \geqslant 1-z^5$ przy czym ostatnia nierówność staje się równością wtedy i tylko wtedy, gdy $x+y=0$, czyli gdy $z=1$, ale wtedy $y=-x$. Wobec tego dla każdego $z<1$ istnieje co najwyżej jedna taka para $(x,y)$, że $x \geqslant y$ i trójka $(x,y,z)$ jest rozwiązaniem badanego układu równań. Wykazaliśmy tym samym, że rozwiązań różnych od podanych na wstępie nie ma.

*Rozwiązanie drugie* Jeśli trójka $(x,y,z)$ jest rozwiązaniem danego układu równań, to $0=(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5=5(x+y)(y++z)(z+x)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)=\frac{5}{2}(x+y)(y+z)(z+x)\big((x++y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2\big)$, zatem ta równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi co najmniej jedna z równości $x+y=0$, $y+z=0$ lub $z+x=0$. Z pierwszej z nich wynika, że $z=1$, z drugiej — $x=1$, a z trzeciej — $y=1$.

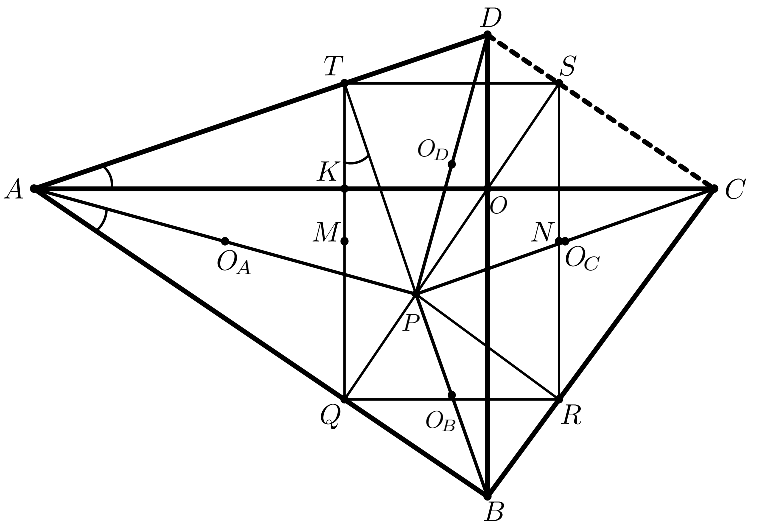
*Uwaga.* Niech $w(x,y,z)=(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$. Mamy $w(-y,y,z)==0$. Wobec tego jeśli potraktujemy wielomian $w$ zmiennych $x,y,z$ jako wielomian zmiennej $x$, którego współczynnikami są wielomiany zmiennych $y,z$, to jest on podzielny przez wielomian $x-(-y)=x+y$. Wynik jest wielomianem trzech zmiennych (lub zmiennej $x$, którego współczynnikami są wielomiany zmiennych $y,z$). Ponieważ $w(x,-z,z)=0$, więc jest on (jako wielomian zmiennej $y$) podzielny przez wielomian $y-(-z)=y+z$. Wynik dzielenia potraktowany jako wielomian zmiennej $z$ jest podzielny przez $z+x$. Wobec tego istnieje wielomian taki $v$ zmiennych $x,y,z$, że $w(x,y,z)=(x+y)(y+z)(z+x)v(x,y,z)$. Ponieważ wielomiany $w$ oraz $(x+y)(y+z)(z+x)$ są symetryczne, więc również wielomian $v$ jest symetryczny. Ponieważ $w(tx,ty,tz)=t^5w(x,y,z)$ i $(tx+ty)(ty+tz)(tz+tx)=t^3(x+y)(y+z)(z+x)$ dla każdej czwórki liczb $t,x,y,z$, więc $v(tx,ty,tz)=t^2v(x,y,z)$, a stąd wynika od razu, że istnieją takie liczby $a,b$, że $v(x,y,z)=ax^2+ay^2+az^2+bxy++byz+bzx$ dla dowolnych liczb $x,y,z$. Mamy $\frac{w(1,1,0)}{(1+1)(1+0)(0+1)}=15$ oraz $\frac{w(2,1,0)}{(2+1)(1+0)(0+2)}=35$, więc $15=v(1,1,0)=2a+b$ i $35=v(2,1,0)==5a+2b$, zatem $a=5a+2b-2(2a+b)=35-30=5$, więc $b=15-2\cdot 5=5$. Stąd wynika równość $(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5==5(x+y)(y+z)(z+x)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)$ dla wszystkich trójek $(x,y,z)$. Wreszcie można ten układ rozwiązać traktując np. $z$ jako parametr i wyznaczyć $x$ i $y$ w zależności od $z$, ale tego już robić nie będziemy.

*Zadanie* **5.** Dowieść, że przekątne wypukłego czworokąta są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy wewnątrz tego czworokąta znajduje się punkt, którego rzuty prostokątne na boki czworokąta są wierzchołkami prostokąta.

*Rozwiązanie*

Udowodnimy najpierw, że jeśli taki punkt istnieje, to przekątne są prostopadłe. Wierzchołki czworokąta oznaczmy kolejno literami $A,B,C,D$. Niech $P$ oznacza punkt, którego rzuty prostokątne na boki czworokąta są wierzchołkami prostokąta. Te rzuty oznaczamy literami $Q,R,S,T$, przy czym punkt $Q$ leży na boku $AB$, $R$ — na boku $BC$ itd. Na każdym z czworokątów $AQPT$, $BRPQ$, $CSPR$ i $DTPS$ można opisać okrąg, bo w każdym dwa przeciwległe kąty sa proste, więc ich sumą jest $180°$. Niech $O_A, O_B, O_C, O_D$ będą środkami odcinków $PA$, $PB$, $PC$, $PD$. Są to środki okręgów opisanych odpowiednio na $AQPT$, $BRPQ$, $CSPR$ i $DTPS$ (środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym to środek jego przeciwprostokątnej). Niech $M$ będzie środkiem odcinka $QT$, a $N$ — odcinka $RS$. Punkt $O_A$ równooddalony od $Q$ i od $T$ leży na symetralnej odcinka $QT$. Podobnie punkt $O_C$ leży na symetralnej odcinka $RS$. Symetralną odcinków $RS$ i $QT$ jest prosta $MN$, bo $QRST$ jest prostokątem. Wobec tego środki odcinków $AP$ i $CP$, czyli punkty $O_A$ i $O_C$ leżą na prostej $MN$.

Trójkąty $O_APO_C$ i $APC$ są jednokładne względem punktu $P$ w skali 2, więc $AC \parallel O_AO_C$, zatem przekątna $AC$ danego czworokąta jest równoległa do boku $QR$ prostokąta $QRST$. W taki sam sposób dowodzimy, że przekątna $BD$ jest równoległa do boku $RS$ tego prostokąta. Jeśli zdarzy się, że punkty $O_A, P, O_C$ są współliniowe, to rozumowanie tylko uprości się. Udowodniliśmy, że z istnienia punktu $P$ wynika prostopadłość przekątnych $AC$ i $BD$.




Trzeba teraz udowodnić, że z prostopadłości przekątnych $AC$ i $BD$ wynika istnienie punktu $P$, więc też prostokąta $QRST$. Niech $O$ będzie punktem wspólnym przekątnych $AC$ i $BD$. Bez straty ogólności rozważań można założyć, że $AO \geqslant OC$ i $BO \geqslant OD$. Niech $\ell_1$ oznacza prostą symetryczną do $AC$ względem dwusiecznej kąta $\sphericalangle DAB$, $\ell_2$ — prostą symetryczną do prostej $BD$ względem dwusiecznej kąta $\sphericalangle ABC$. Niech $P$ będzie punktem wspólnym prostych $\ell_1$ i $\ell_2$. Z założeń $AO \geqslant OC$ i $BO \geqslant OD$ wynika, że $P$ leży w trójkącie $ABO$, poza bokiem $AB$. Niech $K$ będzie punktem wspólnym prostych $AC$ i $QT$. Punkty $T, Q, R$ są rzutami punktu $P$ na proste $DA$, $AB$ i $BC$. Na każdym z czworokątów $AQPT$ i $BRPQ$ można opisać okrąg. Stąd i z konstrukcji punktu $P$ wynika, że $\sphericalangle QTP = \sphericalangle QAP = \sphericalangle KAT$. Wobec tego $\sphericalangle KAT + \sphericalangle KTA = \sphericalangle QTP + \sphericalangle KTA = 90°$, więc $\sphericalangle AKT = 90°$, zatem $QT \perp AC$ i wobec tego $QT \parallel BD$. W taki sam sposób dowodzimy, że $QR \parallel AC$. Wobec tego $QR \perp QT$. Niech $S$ będzie czwartym wierzchołkiem prostokąta $TQRS$. Wykażemy, że $S$ leży na odcinku $CD$. Punkt $O_D$ jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym $PDT$. Odcinek $O_DO_B$ jest równoległy do odcinka $BD$, bo trójkąty $O_DPO_B$ i $DPB$ są jednokładne względem punktu $P$. Wobec tego $O_DO_C \perp TS \parallel QR$. Stąd wynika, że prosta $O_DO_B$ jest symetralną odcinka $TS$. Wobec tego $O_DS = O_DT = O_DD = O_DP$, zatem $O_D$ jest środkiem okręgu opisanego na czworokącie $SDTP$. Ponieważ $PD$ jest średnicą tego okręgu, więc $\sphericalangle DSP = 90°$. Podobnie $\sphericalangle CSP = 90°$. Punkty $C, D$ leżą więc na pr. prostopadłej do $PS$, co kończy dowód.

*Uwaga.* Można bez trudu wykazać (prosta algebra), że jeśli $O = (0,0)$, $A = (a,0)$, $B = (0,b)$, $C = (c,0)$ i $D = (0,d)$, to $P = \left(\frac{bd(a+c)}{ac+bd}, \frac{ac(b+d)}{ac+bd}\right)$, $Q = \left(\frac{abd}{ac+bd}, \frac{abc}{ac+bd}\right)$, $R = \left(\frac{bcd}{ac+bd}, \frac{abc}{ac+bd}\right)$, $S = \left(\frac{bcd}{ac+bd}, \frac{acd}{ac+bd}\right)$, $T = \left(\frac{abd}{ac+bd}, \frac{acd}{ac+bd}\right)$. Pokażemy, jak można to zrobić. Równanie prostej $AB$ wygląda tak: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Sprawdzamy szybko: $\frac{a}{a} + \frac{0}{b} = 1$ oraz $\frac{0}{a} + \frac{b}{b} = 1$, więc współrzędne punktów $A$ i $B$ spełniają to równanie. Równania prostych $BC$, $CD$ i $DA$ wyglądają tak: $\frac{x}{c} + \frac{y}{b} = 1$, $\frac{x}{c} + \frac{y}{d} = 1$ i $\frac{x}{a} + \frac{y}{d} = 1$. Niech $Q_t = \left(t, b(1 - \frac{t}{a})\right)$, $R_t = \left(\frac{ct}{a}, b(1 - \frac{t}{a})\right)$, $S_t = \left(\frac{ct}{a}, d(1 - \frac{t}{a})\right)$, $T_t = \left(t, d(1 - \frac{t}{a})\right)$ — wyliczone zostały współrzędne tych punktów w zależności od pierwszej współrzędnej punktu $Q_t$, która została oznaczona literą $t$, w taki sposób, by punkt $Q_t$ leżał na prostej $AB$, punkt $R_t$ — na $BC$, punkt $S_t$ — na $BC$, punkt $T_t$ — na $DA$. Czworokąt $Q_tR_tS_tT_t$ jest prostokątem o bokach równoległych do osi układu współrzędnych. Znajdziemy taki punkt $P_d = (p,q)$, że odcinek $P_dQ_t$ będzie prostopadły do prostej $AB$, a odcinek $P_dR_t$ — prostopadły do prostej $BC$. Spełniona ma być równość $(p-t)\cdot\frac{1}{b} - (q-b+\frac{bt}{a})\cdot\frac{1}{a} = 0$ oraz $(p-\frac{ct}{a})\cdot\frac{1}{b} - (q-b+\frac{bt}{a})\cdot\frac{1}{c} = 0$. Odejmujemy od pierwszej pomnożonej przez $a$ drugą pomnożoną przez $c$: $0 = (p-t)\frac{a}{b} - (p - \frac{ct}{a})\frac{c}{b} = \frac{p(a-c)}{b} + t\frac{c^2-a^2}{ab}$, więc $p = t\frac{c+a}{a}$. Obliczamy drugą współrzędną: $q = (p-t)\cdot\frac{a}{b} + b - \frac{bt}{a} = \frac{ct}{a}\cdot\frac{a}{b} + b - \frac{bt}{a} = b + t\frac{ac-b^2}{ab}$. W taki sam sposób znajdujemy taki punkt $P_g = (\tilde{p}, \tilde{q})$, że $P_gT_t \perp AD$ i $P_gS_t \perp AD$: $\tilde{p} = t\frac{c+a}{a} = p$ i $\tilde{q} = d + t\frac{ac-d^2}{ad}$. Obliczymy $t$ z równania $q = \tilde{q}$: $d - b = t\frac{(ac-b^2)d-(ac-d^2)d}{abd} = t\frac{(ac+bd)(d-b)}{abd}$, zatem $t = \frac{abd}{ac+bd}$. Dla tego $t$ otrzymujemy $P := P_d = P_g = \left(\frac{bd(a+c)}{ac+bd}, \frac{ac(b+d)}{ac+bd}\right)$. Rzutami punktu $P$ na proste $AB$, $BC$, $CD$ i $DA$ są punkty $Q := Q_t = \left(\frac{abd}{ac+bd}, \frac{abc}{ac+bd}\right)$, $R := R_t = \left(\frac{bcd}{ac+bd}, \frac{abc}{ac+bd}\right)$, $S := S_t = \left(\frac{bcd}{ac+bd}, \frac{acd}{ac+bd}\right)$, $T := T_t = \left(\frac{abd}{ac+bd}, \frac{acd}{ac+bd}\right)$. Zauważyć należy jeszcze, że punkt $P$ znajduje się po tej samej stronie prostej $AB$ co punkty $C, D$, po tej samej stronie prostej $BC$ co punkt $A, D$ itd. Dla dowodu wystarczy spojrzeć na znak wyrażenia $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1$ po podstawieniu w miejsce $(x, y)$ współrzędnych punktów $P$ oraz np. $C$. Otrzymujemy $\frac{bd(a+c)}{a(ac+bd)} + \frac{ac(b+d)}{b(ac+bd)} - 1 = \frac{b^2d(a+c)+a^2c(b+d)-ab(ac+bd)}{ac+bd} = \frac{(b^2+a^2)cd}{ac+bd} < 0$ oraz $\frac{0}{a} + \frac{c}{a} - 1 = \frac{c-a}{a} < 0$. Pozostałe trzy sprawdzenia są analogiczne. o o przydługie opowiadanie ma pokazać, że w krótkim czasie można było znaleźć punkt $P$ rozwiązując kilka równań liniowych.

*Zadanie* **6.** Wykazać, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej $a$ istnieje taka liczba całkowita $b > a$, że liczba $1 + 2^b + 3^b$ dzieli się przez liczbę $1 + 2^a + 3^a$.

*Rozwiązanie*

Dla $a = 1$ twierdzenie jest prawdziwe, bo $1 + 2 + 3 = 6$ jest dzielnikiem liczby $1 + 2^3 + 3^3 = 36$. Dalej zakładamy, że $a \geqslant 2$. Niech $1 + 2^a + 3^a = 2^r 3^s m$, gdzie $r, s$ są nieujemnymi liczbami całkowitymi a $m$ — dodatnią liczbą całkowitą niepodzielną ani przez 2, ani przez 3. Niech $k$ będzie liczbą liczb względnie pierwszych z $m$ ze zbioru $\{1, 2, \ldots, m\}$. Z twierdzenia Eulera wynika, że liczby $2^k - 1$ i $3^k - 1$ są podzielne przez $m$, zatem dla każdej dodatniej liczby całkowitej $n$ liczby $2^{nk} - 1 = (2^k - 1)(2^{k(n-1)} + 2^{k(n-2)} + \ldots + 1)$ i $3^{nk} - 1 = (3^k - 1)(3^{k(n-1)} + 3^{k(n-2)} + \ldots + 1)$ są podzielne przez $m$. Jeśli $n \geqslant 0$ jest liczbą całkowitą, to liczba $3^{2n}+1 = (3^n+1)^2 - 2\cdot 3^n$ jest podzielna przez 2 i niepodzielna przez 4, natomiast liczba $3^{2n+1}+1$ jest podzielna przez 4, ale nie przez 8, bo: $3^{2n+1}+1 = 3(3^n-1)(3^n+1)+4$, liczba $(3^n - 1)(3^n + 1)$ dzieli się przez 8 jako różnica **kolejnych** liczb parzystych. Wobec tego $r = 1$ dla parzystych $a$ oraz $r = 2$ dla nieparzystych $a$. Zachodzi nierówność $s < a$, bo $3^a > 2^a+1$, więc $3^a$ nie dzieli $2^a+1$. Ponieważ $3^s$ jest dzielnikiem obu liczb $1+2^a+3^a$ i $3^a$, więc jest dzielnikiem $1+2^a$. Niech $b = a+2ak$. Mamy $1+2^b+3^b-(1+2^a+3^a) = 2^a(2^{2ka}-1)+3^a(3^{2ka}-1)$. Liczby $2^{2ka}-1$ i $3^{2ka}-1$ dzielą się przez $m$. Liczby $3^a$ i $2^{2ka}-1 = (2^a-1)(2^a+1)(2^a+1)(2^{2a(k-1)}+2^{2a(k-2)}+\ldots+1)$ dzielą się przez $3^s$. Liczby $2^2$ i $3^{2ka} - 1$ dzielą się przez 4. Wobec tego różnica $1 + 2^b + 3^b - (1 + 2^a + 3^a)$ jest podzielna przez $m$, przez $3^s$ i przez 4, więc przez $1 + 2^a + 3^a$, co kończy dowód.