LXVII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego
I seria: 1 września 2015 r. — 30 września 2015 r.

1. Na tablicy napisano liczbę całkowitą dodatnią. W każdym kroku zmazujemy liczbę n napisaną na tablicy i piszemy nową liczbę. Jeśli liczba n jest parzysta, to piszemy na tablicy liczbę $\frac{n}{2}$. Jeśli liczba n jest nieparzysta, to wybieramy jedną z liczb $3n+1$, $3n-1$ i piszemy ją na tablicy.

Czy — niezależnie od tego, jaką liczbę napisano na tablicy na początku —możemy, po skończenie wielu krokach, uzyskać na tablicy jedynkę?

2. W trójkącie ABC punkt D leży na boku BC, E — na boku AB, przy czym $BD = AC$, $AD = AE$ i $AB^2 = AC \cdot BC$. Dowieść, że $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CEA$.

3. Niech $f(x)$ i $g(x)$ będą takimi funkcjami kwadratowymi, że nierówność $|f(x)| \geqslant |g(x)|$ zachodzi dla każdej liczby rzeczywistej x. Δ_f jest wyróżnikiem funkcji f, a Δ_g — wyróżnikiem funkcji g. Udowodnić, że $|\Delta_f| \geqslant |\Delta_g|$.

4. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Kąt przy wierzchołku B jest prosty, a kąty przy wierzchołkach A i C — ostre. Przez punkt P, leżący wewnątrz czworokąta $ABCD$ poprowadzono proste równoległe do boków AB i CB. Dzielą one czworokąt $ABCD$ na cztery wielokąty.

Wielokąt, którego jednym z wierzchołków jest A ma pole a.

Wielokąt, którego jednym z wierzchołków jest B ma pole b.

Wielokąt, którego jednym z wierzchołków jest C ma pole c.

Czwarty wielokąt ma pole d.

Udowodnić, że $ac \geqslant bd$.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

30 września 2015 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane. Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.

LXVII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego
II seria: 1 października 2015 r. — 2 listopada 2015 r.

5. Wykazać, że dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich a, b równanie

$$(x^2 - y^2 - a)(x^2 - y^2 - b)(x^2 - y^2 - ab) = 0$$

ma przynajmniej jedno rozwiązanie w liczbach całkowitych x, y.

6. Znaleźć wszystkie takie pary P, Q wielomianów o współczynnikach rzeczywistych, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzą obie równości: $P(x^2+1) = Q(x)^2 + 2x$ oraz $Q(x^2+1) = P(x)^2$.

7. Dwuosobowa gra polega na stawianiu pionków na wierzchołkach n–kąta foremnego (zakładamy, że $n \geqslant 3$). Gracze wykonują ruchy na przemian. Gracz stawia jeden ze swych, dotychczas nieużytych pionków na dowolnym niezajętym wierzchołku, który nie sąsiaduje z wierzchołkiem zajętym przez pionek przeciwnika. Przegrywa gracz, który nie może wykonać ruchu. Rozstrzygnąć, w zależności od n, czy strategię wygrywającą ma gracz rozpoczynający grę, czy jego przeciwnik?

8. W trójkącie ABC punkt I jest środkiem okręgu wpisanego. Prosta AI przecina odcinek BC w punkcie D. Symetralna odcinka AD przecina proste BI oraz CI odpowiednio w punktach P i Q. Dowieść, że wysokości trójkąta PQD przecinają się w punkcie I.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

2 listopada 2015 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane. Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.

LXVII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego
III seria: 3 listopada 2015 r. — 4 grudnia 2015 r.

9. Dowieść, że liczba $\sqrt{10}-\sqrt{6}-\sqrt{5}+\sqrt{3}$ jest niewymierna.

10. Rozwiązać układ n równań z niewiadomymi $x_1, x_2, \ldots, x_n$, gdzie $n \geqslant 2$:

$$\begin{cases} 2x_1^3+4=x_1^2(x_2+3) \\ 2x_2^3+4=x_2^2(x_3+3) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2x_{n-1}^3+4=x_{n-1}^2(x_n+3) \\ 2x_n^3+4=x_n^2(x_1+3) \end{cases}$$

11. Wiersze i kolumny nieskończonej tabeli są ponumerowane liczbami całkowitymi nieujemnymi. W jej pola wpisane są liczby całkowite nieujemne według następującej reguły: w każdym polu znajduje się najmniejsza liczba, nieobecna w żadnym wcześniejszym polu tego samego wiersza ani tej samej kolumny (poniżej, dla ilustracji, fragment tej tabeli). Udowodnić, że jeśli na przecięciu m–tego wiersza z n–tą kolumną znajduje się liczba r, to na przecięciu m–tego wiersza z r–tą kolumną znajduje się liczba n.

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 5 & \ldots \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 6 & \ldots \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 7 & \ldots \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

12. Dany jest czworościan $ABCD$. Punkt S jest środkiem sfery wpisanej w czworościan $ABCD$, zaś Q jest środkiem sfery dopisanej do niego, stycznej do ściany ABC oraz do płaszczyzn pozostałych ścian. Punkty K i L są rzutami prostokątnymi punktu Q na proste AB i BC. Dowieść, że proste (skośne) KL i BS są prostopadłe.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

4 grudnia 2015 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane. Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.

Adresy Komitetów Okręgowych Olimpiady Matematycznej

- Dla województwa pomorskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego,
  ul. Wita Stwosza 57, 80–952 Gdańsk.
- Dla województwa śląskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego,
  ul. Bankowa 14, 40-007 Katowice.
- Dla województwa małopolskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego,
  ul. Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków.
- Dla województwa lubelskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Zakład Rachunku Prawdopodobieństwa pok. 810, Instytut Matematyki Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej,
  pl. Marii Curie-Skłodowskiej 1, 20-031 Lublin.
- Dla województwa łódzkiego i świętokrzyskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego,
  ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.
- Dla województwa wielkopolskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Adama Mickiewicza,
  ul. Umultowska 87, 61-614 Poznań.
- Dla województwa podkarpackiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Katedra Matematyki Politechniki Rzeszowskiej,
  al. Powstańców Warszawy 8, 35-959 Rzeszów.
- Dla województwa lubuskiego i zachodniopomorskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Szczecińskiego,
  ul. Wielkopolska 15, 70-451 Szczecin.
- Dla województwa kujawsko-pomorskiego i warmińsko-mazurskiego: — Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.
- Dla województwa mazowieckiego i podlaskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk,
  ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa.
- Dla województwa dolnośląskiego i opolskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego,
  pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: www.om.edu.pl