LXVII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia drugiego

19 lutego 2016 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. We wnętrzu trójkąta o bokach długości $3, 4, 5$ leży punkt P. Wykazać, że jeżeli odległości P od wierzchołków są wszystkie wymierne, to odległości P od boków też.

2. W trójkącie ostrokątnym ABC dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie D. Symetralna odcinka AD przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punktach E i F. Udowodnić, że okrąg opisany na trójkącie DEF jest styczny do prostej BC.

3. Niech $\mathbb{Z}$ oznacza zbiór liczb całkowitych. Rozstrzygnąć, czy istnieje funkcja f, która każdej liczbie całkowitej k przypisuje nieujemną liczbę całkowitą $f(k)$ i spełnia następujące dwa warunki:

- $f(0) > 0$,
- dla każdej liczby całkowitej k najmniejsza spośród liczb postaci $f(k-l) + f(l)$, gdzie $l \in \mathbb{Z}$, jest równa $f(k)$.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.

LXVII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia drugiego

20 lutego 2016 r. (drugi dzień zawodów)

4. Dana jest liczba całkowita dodatnia k. Udowodnić, że istnieje liczba całkowita dodatnia n, dla której zbiory $A = \{1^2, 2^2, 3^2, \ldots\}$ i $B = \{1^2+n, 2^2+n, 3^2+n, \ldots\}$ mają dokładnie k wspólnych elementów.

5. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkty P i Q leżą odpowiednio na półprostych $AB^{\rightarrow}$ i $AD^{\rightarrow}$, przy czym $AP = CD$, $AQ = BC$. Wykazać, że środek odcinka PQ leży na prostej AC.

6. W przestrzeni danych jest n zielonych punktów, przy czym $n \geqslant 4$ i żadne cztery zielone punkty nie leżą na jednej płaszczyźnie. Niektóre odcinki łączące zielone punkty pomalowano na czerwono. Liczba czerwonych odcinków jest parzysta. Każde dwa różne zielone punkty łączy pewna łamana złożona z czerwonych odcinków.

Udowodnić, że czerwone odcinki da się podzielić na takie pary, że odcinki z jednej pary mają wspólny koniec.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.