LXVII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia trzeciego

6 kwietnia 2016 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Niech p będzie ustaloną liczbą pierwszą. Znaleźć wszystkie nieujemne liczby całkowite n, dla których wielomian

$$W(x) = x^4 - 2(n+p)x^2 + (n-p)^2$$

może być zapisany w postaci iloczynu dwóch trójmianów kwadratowych o współczynnikach całkowitych.

2. Okrąg ω o środku I wpisany w czworokąt wypukły $ABCD$ jest styczny do boku AB w punkcie M, a do boku CD — w punkcie N, przy czym $\sphericalangle BAD + \sphericalangle ADC < 180^\circ$. Na prostej MN wybrano taki punkt $K \neq M$, że $AK = AM$. Dowieść, że prosta ID przechodzi przez środek odcinka KN.

3. Dane są dodatnie liczby całkowite a i b. Przez $f(a,b)$ oznaczamy liczbę takich a–wyrazowych ciągów liczb całkowitych, że suma wartości bezwzględnych wyrazów ciągu nie przekracza b.
Udowodnić, że $f(a,b) = f(b,a)$.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.

LXVII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia trzeciego

7 kwietnia 2016 r. (drugi dzień zawodów)

4. Niech k, n będą liczbami nieparzystymi większymi od 1. Wykazać, że jeśli istnieje taka liczba naturalna a, że

$$k \mid 2^a + 1 \ \text{ oraz } \ n \mid 2^a - 1, \tag{1}$$

to nie istnieje taka liczba naturalna b, że

$$n \mid 2^b + 1 \ \text{ oraz } \ k \mid 2^b - 1. \tag{2}$$

Uwaga: Symbol $p \mid q$ oznacza, że liczba całkowita p jest dzielnikiem liczby całkowitej q.

5. Dane są dodatnie liczby rzeczywiste $a < b$. Dowieść, że istnieją takie dodatnie liczby całkowite p, q, r, s, że $a < \frac{p}{q} < \frac{r}{s} < b$ oraz $p^2 + q^2 = r^2 + s^2$.

6. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Prosta AI przecina prostą BC w punkcie D oraz okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie $S \neq A$. Punkt K jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt DSB, a punkt L — w trójkąt DSC. Punkt P jest odbiciem symetrycznym punktu I względem prostej KL.
Wykazać, że kąt BPC jest prosty.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.