LXVII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych

zawodów stopnia trzeciego

6 kwietnia 2016 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. *Niech p będzie ustaloną liczbą pierwszą. Znaleźć wszystkie nieujemne liczby całkowite n, dla których wielomian*

$$W(x) = x^4 - 2(n+p)x^2 + (n-p)^2$$

może być zapisany w postaci iloczynu dwóch trójmianów kwadratowych o współczynnikach całkowitych.

Rozwiązanie

Załóżmy, że dla pewnych liczb całkowitych a, b, c, A, B, C równość

$$x^4 - 2(n+p)x^2 + (n-p)^2 = (ax^2 + bx + c)(Ax^2 + Bx + C)$$

zachodzi dla każdej liczby x. Po wymnożeniu otrzymujemy

$$x^4 - 2(n+p)x^2 + (n-p)^2 =$$
$$= aAx^4 + (aB + bA)x^3 + (aC + bB + cA)x^2 + (bC + cB)x + cC.$$

Ponieważ równość zachodzi dla wszystkich liczb x, więc współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej x po obu stronach równości muszą być takie same, czyli $aA = 1$, $aB + bA = 0$, $aC + bB + cA = -2(n+p)$, $bC + cB = 0$ i $cC = (n-p)^2$. Liczby a i A są całkowite, więc albo $a = A = 1$, albo $a = A = -1$. Możemy przyjąć, że $a = 1 = A$, bo w przeciwnym wypadku możemy zastąpić szóstkę a, b, c, A, B, C szóstką $-a, -b, -c, -A, -B, -C$.

Wobec tego $b + B = 0$, $C - b^2 + c = -2(n+p)$, $b(C - c) = 0$ oraz $cC = (n-p)^2$, zatem $b = 0$ lub $c = C$.

Jeśli $b = 0$, to $B = 0$, $C + c = -2(n+p)$ oraz $cC = (n-p)^2$, więc $(C-c)^2 = (C+c)^2 - 4Cc = 4(n+p)^2 - 4(n-p)^2 = 16np$. Liczba $16np$ okazała się być kwadratem liczby całkowitej, a to oznacza, że istnieje taka liczba całkowita k, że $n = k^2p$. Wtedy

$$x^4 - 2(n+p)x^2 + (n-p)^2 = x^4 - 2p(k^2+1)x^2 + p^2(k^2-1)^2 =$$
$$= (x^2 - p(k^2+1))^2 - p^2((k^2+1)^2 - (k^2-1)^2) =$$
$$= (x^2 - p(k^2+1))^2 - 4k^2p^2 = (x^2 - p(k+1)^2)(x^2 - p(k-1)^2)\,.$$

Został do rozpatrzenia jeszcze jeden przypadek: $c = C$. Mamy teraz $2c - b^2 = -2(n+p)$ i $c^2 = (n-p)^2$, więc $c = n - p$ lub $c = p - n$. Stąd $b^2 = 2(c + p + n)$, więc $b^2 = 4n$ lub $b^2 = 4p$. Liczba $4p$ nie jest kwadratem liczby całkowitej, bo p jest liczba pierwszą. Natomiast liczba $4n$ jest kwadratem liczby całkowitej wtedy i tylko wtedy, gdy $n = k^2$ dla pewnej całkowitej liczby k. W tym ostatnim przypadku zachodzi równość

$$x^4 - 2(n+p)x^2 + (n-p)^2 = (x^2 + 2kx + k^2 - p)(x^2 - 2kx + k^2 - p)\,.$$

Reasumując: wielomian W jest iloczynem dwóch trójmianów kwadratowych wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba całkowita k, że $n = p \cdot k^2$ lub $n = k^2$. □

3. *Dane są dodatnie liczby całkowite a i b. Przez $f(a, b)$ oznaczamy liczbę takich a–wyrazowych ciągów liczb całkowitych, że suma wartości bezwzględnych wyrazów ciągu nie przekracza b.*

Udowodnić, że $f(a, b) = f(b, a)$.

Rozwiązanie

Przyjmijmy dodatkowo, że $f(a, 0) = 1$ dla każdej liczby całkowitej $a > 0$ — to liczba a–elementowych ciągów o sumie 0. Zauważmy, że $f(1, b) = 2b + 1$ — ciągi jednowyrazowe można wypisać (zob. niżej). Mamy również $f(a, 1) = 2a + 1$, bo ciągów długości a, w których liczba ± 1 występuje dokładnie jeden raz jest $2a$, do nich dochodzi ciąg złożony z samych zer. Wykazaliśmy, że dla każdej liczby całkowitej $c > 0$ zachodzi równość $f(1, c) = f(c, 1)$.

Teraz zastosujemy indukcję względem $a + b$.

Ciąg a–wyrazowy można otrzymać z ciągu $(a-1)$–wyrazowego dopisując na końcu jedną spośród następujących liczb: $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm b$, w zależności od tego jaka jest suma ciągu $(a-1)$–wyrazowego. Prowadzi to do następującego wzoru rekurencyjnego (dla $a > 1$):

$$f(a, b) = f(a-1, b) +$$
$$+2\big(f(a-1, b-1) + f(a-1, b-2) + f(a-1, b-3) + \ldots + f(a-1, 0)\big).$$

Z otrzymanej zależności wynika następująca równość

$$f(a, b) = f(a-1, b) + f(a-1, b-1) + \big(f(a-1, b-1) +$$
$$+ 2\big(f(a-1, b-2) + f(a-1, b-3) + \ldots + f(a-1, 0)\big)\big) =$$
$$= f(a-1, b) + f(a-1, b-1) + f(a, b-1).$$

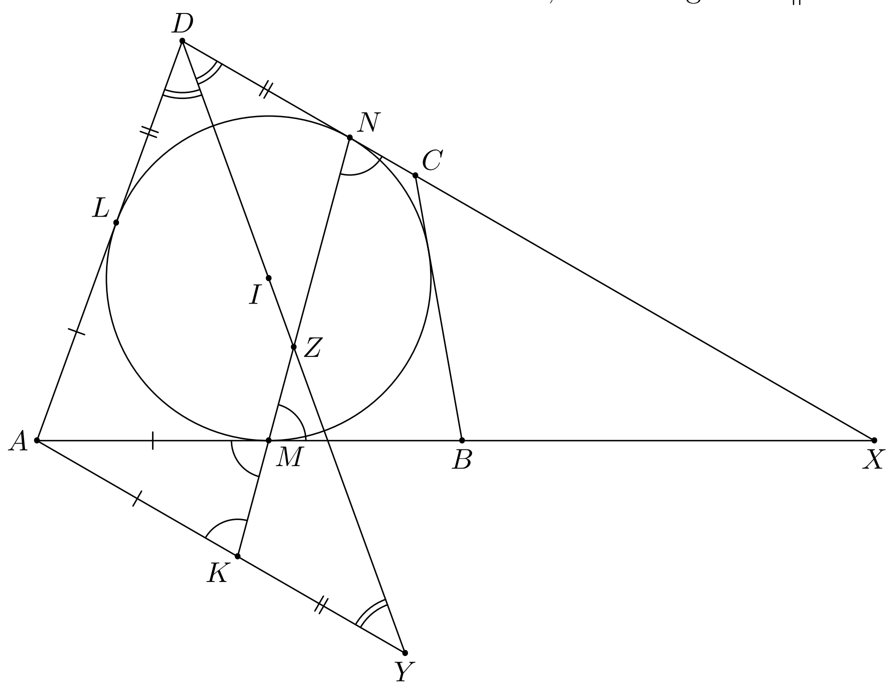
Z ostatniej formuły wynika, że jeśli $f(x, y) = f(y, x)$, gdy $x + y < a + b$, to również $f(a, b) = f(b, a)$. □

2. *Okrąg ω o środku I wpisany w czworokąt wypukły $ABCD$ jest styczny do boku AB w punkcie M, a do boku CD — w punkcie N, przy czym $\sphericalangle BAD + \sphericalangle ADC < 180°$. Na prostej MN wybrano taki punkt $K \neq M$, że $AK = AM$. Dowieść, że prosta ID przechodzi przez środek odcinka KN.*

Rozwiązanie

Skoro $\sphericalangle BAD + \sphericalangle ADC < 180°$, to proste AB i CD przecinają się w punkcie X leżącym po tej samej stronie prostej MN, co punkty B i C. Kąt $\sphericalangle XMN$ jest ostry (ponieważ jest kątem przy podstawie trójkąta równoramiennego XMN), więc kąt $\sphericalangle NMA$ jest rozwarty. Stąd wynika, że punkt M leży pomiędzy punktami K i N.

Z równoramienności trójkątów AMK i XMN wynika, że $\sphericalangle MKA = \sphericalangle AMK = \sphericalangle XMN = \sphericalangle MNX$, wobec tego $AK \parallel CD$.



Niech Y będzie punktem przecięcia prostych AK i DI, zaś L — punktem styczności odcinka AD z okręgiem ω. Punkty K, Y leżą na prostej AK po tej samej stronie punktu A, bo dwusieczna $DI^{\rightarrow}$ i półprosta $AK^{\rightarrow}$ leżą po tej samej stronie prostej AD. Wtedy $\sphericalangle ADY = \sphericalangle YDC = \sphericalangle DYA$, bo DI jest dwusieczną kąta $\sphericalangle ADX$ i $AK \parallel CD$. Wobec tego $AY = AD = AL + LD > AL = AM = AK$, więc punkt K leży między punktami A i Y.

Wtedy $AL = AM$ oraz $DL = DN$. Wobec tego zachodzą równości $DN = DL = AD - AL = AY - AM = AY - AK = KY$.

Oznaczmy punkt przecięcia prostych MN i DI przez Z. Trójkąty DNZ i YKZ są podobne, bo mają takie same kąty ($\sphericalangle KZY = \sphericalangle NZD$ oraz $\sphericalangle ZDN = \sphericalangle ZYK$). Jednakże $DN = KY$, więc trójkąty te są przystające. Stąd $NZ = ZK$, co oznacza, że ID przechodzi przez środek odcinka KN. $\square$

LXVII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia trzeciego

7 kwietnia 2016 r. (drugi dzień zawodów)

4. *Niech k, n będą liczbami nieparzystymi większymi od 1. Wykazać, że jeśli istnieje taka liczba naturalna a, że*

$$(1) \qquad k \mid 2^a + 1 \quad \textit{oraz} \quad n \mid 2^a - 1,$$

to nie istnieje taka liczba naturalna b, że

$$(2) \qquad n \mid 2^b + 1 \quad \textit{oraz} \quad k \mid 2^b - 1.$$

Uwaga: Symbol $p \mid q$ oznacza, że liczba całkowita p jest dzielnikiem liczby całkowitej q.

Rozwiązanie

Załóżmy, że warunki (1) i (2) są spełnione jednocześnie. Każdy wspólny dzielnik liczb k i n dzieli liczbę $2^a + 1 - (2^a - 1) = 2$, więc k i n — jako nieparzyste — są względnie pierwsze.

Niech α oznacza najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą, dla której $k \mid 2^\alpha - 1$, zaś β — najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą, dla której $n \mid 2^\beta - 1$. Jeśli $\mu \geqslant 1$ jest liczbą całkowitą, to

$$k \mid (2^\alpha - 1)(2^{(\mu-1)\alpha} + 2^{(\mu-2)\alpha} + \ldots + 2^\alpha + 1) = 2^{\mu\alpha} - 1.$$

Niech $m > 0$ będzie liczbą całkowitą, a ϱ — resztą z dzielenia m przez ϱ: $m = \mu\alpha + \varrho$, gdzie $\mu \geqslant 0$ i $0 \leqslant \varrho < \alpha$. Wtedy $k \mid 2^\varrho(2^{\mu\alpha} - 1) = 2^m - 2^\varrho$, więc liczby 2^ϱ i 2^m dają tę samą resztę z dzielenia przez k. Wynika stąd w szczególności równoważność $k \mid 2^m - 1 \Longleftrightarrow \alpha \mid m$.

Niech $c \geqslant 0$ będzie taką liczbą całkowitą, że $a = c\alpha + \gamma$ dla pewnej liczby $\gamma \in \{0, 1, 2, \ldots, \alpha - 1\}$. Ponieważ $k \mid 2^a + 1$, więc $k \mid 2^{c\alpha+\gamma} - 2^\gamma + 2^\gamma + 1$, zatem $k \mid 2^\gamma + 1$. Oczywiście $\gamma > 0$ i $k \mid 2^{2\gamma} - 1 = (2^\gamma + 1)(2^\gamma - 1)$, więc $\alpha \mid 2\gamma \leqslant 2\alpha - 2$, czyli $\alpha = 2\gamma$. W taki sam sposób wykazujemy, że jeśli δ jest resztą z dzielenia b przez β, to $\beta = 2\delta$ i $n \mid 2^\delta + 1$.

Zachodzi równość $a = c\alpha + \gamma = \gamma(2c + 1)$. Podobnie $b = d\beta + \delta = \delta(2d + 1)$, gdzie $d \geqslant 0$ jest taką liczbą całkowitą, że $b = d\beta + \delta$.

Ponieważ $n \mid 2^a - 1$, więc $2\delta = \beta \mid a = \gamma(2c + 1)$. Widzimy również, że $k \mid 2^b - 1$, więc $2\gamma = \alpha \mid b = \delta(2d + 1)$. Stąd wynika, że $4\gamma\delta \mid \gamma\delta(2c + 1)(2d + 1)$, zatem $4 \mid (2c + 1)(2d + 1)$. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że warunki (1) i (2) nie mogą być spełnione równocześnie . $\square$

5. *Dane są dodatnie liczby rzeczywiste $a < b$. Dowieść, że istnieją takie dodatnie liczby całkowite p, q, r, s, że $a < \frac{p}{q} < \frac{r}{s} < b$ oraz $p^2 + q^2 = r^2 + s^2$.*

Rozwiązanie

Niech x, y będą dowolnymi liczbami wymiernymi z przedziału $(0, 1)$.

Wówczas liczby dodatnie

$$(1) \qquad u = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}, \qquad v = \frac{2x}{1 + x^2}, \qquad w = \frac{1 - y^2}{1 + y^2}, \qquad z = \frac{2y}{1 + y^2}$$

też są wymierne, a przy tym $u^2 + v^2 = 1$, $w^2 + z^2 = 1$. Zapiszmy te cztery liczby wymierne jako ułamki o wspólnym mianowniku:

$$(2) \qquad u = \frac{q}{D}, \qquad v = \frac{p}{D}, \qquad w = \frac{s}{D}, \qquad z = \frac{r}{D}.$$

Widzimy, że $p^2 + q^2 = D^2 = r^2 + s^2$; liczby naturalne p, q r, s spełniają więc równość, postulowaną w treści zadania.

Trzeba jeszcze zadbać o nierówności $a < \frac{p}{q} < \frac{r}{s} < b$, czyli

$$(3) \qquad a < \frac{2x}{1 - x^2} < \frac{2y}{1 - y^2} < b.$$

Środkowa nierówność jest spełniona, gdy $x < y$. Pozostałe dwie:

$$ax^2 + 2x - a > 0 \quad \text{oraz} \quad by^2 + 2y - b < 0$$

są spełnione (w liczbach dodatnich x, y), odpowiednio, dla

$$(4) \qquad x > \frac{\sqrt{1 + a^2} - 1}{a} =: A \quad \text{oraz} \quad y < \frac{\sqrt{1 + b^2} - 1}{b} =: B.$$

Jasne, że $A > 0$, $B < 1$. Ponadto $A < B$, skoro

$$A = \frac{\sqrt{1+a^2}-1}{a} = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}+1} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+1}+\frac{1}{a}} < \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{b^2}+1}+\frac{1}{b}} = B\,.$$

Przedział (A, B) jest więc niepusty i jest zawarty w przedziale $(0, 1)$.

Istnieje wobec tego nieskończenie wiele par ułamków $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{s}$, o jakie chodzi w zadaniu. Wystarczy bowiem wybrać z przedziału (A, B) *dowolne* dwie różne liczby wymierne x, y: $A < x < y < B$; a następnie określić liczby wymierne u, v, w, z wzorami (1) i zapisać je w formie (2); spełniona będzie równość $p^2 + q^2 = r^2 + s^2$ oraz nierówności (4), więc i nierówność (3), czyli $a < \frac{p}{q} < \frac{r}{s} < b$.

Uwaga. Przedstawione rozumowanie ma wyrazistą interpretację trygonometryczną: liczby dodatnie u, v, spełniające równanie

$u^2 + v^2 = 1$, dadzą się zapisać jako kosinus oraz sinus pewnego kąta ostrego α. Wzory (1) to wówczas znane ich wyrażenia przez $x = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

Dociekliwy czytelnik dostrzeże, że treść zadania wyraża następujący fakt algebraiczno–geometryczny: na każdym łuku okręgu o równaniu $u^2 + v^2 = 1$ znajdują się punkty (a nawet nieskończenie wiele punktów) o obu współrzędnych wymiernych.

Ostatnie stwierdzenie można wywnioskować też z tego, że jeśli $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\cos\beta$ i $\sin\beta$ są liczbami wymiernymi, to liczby

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \quad \text{oraz}$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

są wymierne. Niech $\cos\alpha_n = \frac{n^2-1}{n^2+1}$ oraz $\sin\alpha_n = \frac{2n}{n^2+1}$ dla pewnej liczby całkowitej $n > 0$. Wtedy dla każdej liczby całkowitej $k > 0$ $\cos(k\alpha_n)$ i $\sin(k\alpha_n)$ są wymierne. Dla każdej liczby $\epsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna n, że $\sqrt{(\frac{n^2-1}{n^2+1} - 1)^2 + (\frac{2n}{n^2+1})^2} = \frac{2}{\sqrt{n^2+1}} < \epsilon$. Obroty nie zmieniają długości odcinków, więc odległość punktów $(\cos(k\alpha_n), \sin(k\alpha_n))$ i $(\cos((k+1)\alpha_n), \sin((k+1)\alpha_n))$, równa odległości punktów $(1,0)$ i $\cos(\alpha_n, \sin(\alpha_n))$, jest mniejsza od $\frac{2}{\sqrt{n^2+1}}$, więc te punkty wyznaczają łuki oparte na cięciwach o długości mniejszej niż $\frac{2}{\sqrt{n^2+1}}$. □

6. *Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Prosta AI przecina prostą BC w punkcie D oraz okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie $S \neq A$. Punkt K jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt DSB, a punkt L — w trójkąt DSC. Punkt P jest odbiciem symetrycznym punktu I względem prostej KL.*
Wykazać, że kąt BPC jest prosty.
Rozwiązanie
Niech $X \neq S$ będzie punktem przecięcia prostej SK z okręgiem opisanym na trójkącie ABC. Ponieważ kąty wpisane oparte na łukach tej samej długości są równe, prosta AS jest dwusieczną $\sphericalangle BAC$, a prosta KS jest dwusieczną $\sphericalangle ASB$, więc

$$\sphericalangle BXS = \sphericalangle BAS = \sphericalangle SAC = \sphericalangle SXC \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle ISX = \sphericalangle XSB.$$

Stąd wniosek, że punkty I i B są symetryczne względem prostej SX. W szczególności $KI = KB$. Ponadto, skoro P i I są symetryczne względem prostej KL, to $KI = KP$. Zatem punkty I, B, P leżą na okręgu o środku K.

$$\sphericalangle IPB = \tfrac{1}{2}\sphericalangle IKB = \sphericalangle XKB = 180^\circ - \sphericalangle BKS =$$
$$= \sphericalangle SBK + \sphericalangle KSB = \tfrac{1}{2}(\sphericalangle SBD + \sphericalangle DSB).$$

Analogicznie dowodzimy, że $\sphericalangle CPI = \frac{1}{2}(\sphericalangle CSD + \sphericalangle DCS)$. Korzystając z powyższych równości oraz z tego, że suma kątów wewnętrznych trójkąta BCS wynosi 180°, otrzymujemy

$$\sphericalangle CPB = \sphericalangle IPB + \sphericalangle CPI =$$
$$= \tfrac{1}{2}(\sphericalangle SBD + \sphericalangle DSB + \sphericalangle CSD + \sphericalangle DCS) = \tfrac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ. \ □$$