LXVIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego
I seria: 1 września — 30 września 2016 r.

1. Rozstrzygnąć, czy istnieją takie trzy różne, niezerowe liczby rzeczywiste a,b,c, że spośród liczb

$$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}, \quad \frac{b+c}{b^2+bc+c^2}, \quad \frac{c+a}{c^2+ca+a^2}$$

pewne dwie są równe, a trzecia jest od nich różna.

2. W skrzyni znajduje się 2017 kul. Na każdej kuli napisana jest dokładnie jedna liczba całkowita. Losujemy ze zwracaniem dwie kule ze skrzyni i dodajemy napisane na nich liczby. Udowodnić, że prawdopodobieństwo otrzymania parzystej sumy jest większe niż $\frac{1}{2}$.

3. Odcinki AD, BE są wysokościami trójkąta ostrokątnego ABC. Punkt M jest środkiem odcinka AB. Punkty P, Q są symetryczne do punktu M odpowiednio względem prostych AD, BE. Wykazać, że środek odcinka DE leży na prostej PQ.

4. Niech t będzie liczbą z przedziału $(0,1)$. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a,b zachodzi nierówność

$$|a+(1+t)b|+|a+(1-t)b| \geqslant \frac{2t}{2+t}\cdot(|a|+|b|)\,.$$

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

30 września 2016 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.
Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą szkoły i jej adresem.

LXVIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego
II seria: 1 października — 31 października 2016 r.

5. Wykazać, że istnieje liczba naturalna n, która ma więcej niż 2017 dzielników d spełniających warunek

$$\sqrt{n} \leqslant d < 1,01\sqrt{n}.$$

6. W balu uczestniczyło 20 kawalerów i 20 dam. W każdym z 99 tańców tańczyła dokładnie jedna para, za każdym razem inna. W każdej parze tańczyła dama z kawalerem. Dowieść, że istnieje takich dwóch kawalerów i takie dwie damy, że każdy z tych dwóch kawalerów zatańczył z obiema tymi damami.

7. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD. Symetralna boku AD przecina odcinek BC w punkcie E. Prosta równoległa do prostej AE, przechodząca przez punkt C, przecina odcinek AD w punkcie F. Dowieść, że

$$\sphericalangle AFB = \sphericalangle CFD.$$

8. Dane są liczby całkowite a, b, c. Udowodnić, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, że liczba $n^3 + an^2 + bn + c$ nie jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

31 października 2016 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.
Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą szkoły i jej adresem.

LXVIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego
III seria: 1 listopada — 30 listopada 2016 r.

9. Wykazać, że równanie

$$\left(x^2+2y^2\right)^2-2\left(z^2+2t^2\right)^2=1$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych x, y, z, t.

10. Dla ustalonej dodatniej liczby całkowitej n rozważamy równanie

$$x_1+2x_2+\ldots+nx_n=n,$$

w którym niewiadome $x_1,\ldots,x_n$ mogą przybierać wartości całkowite nieujemne. Dowieść, że to równanie ma tyle samo rozwiązań $(x_1,\ldots,x_n)$, spełniających warunek

(1) dla każdego $k\in\{1,\ldots,n-1\}$: $x_k>0$ lub $x_{k+1}=0$,

ile ma rozwiązań $(x_1,\ldots,x_n)$, spełniających warunek

(2) dla każdego $k\in\{1,\ldots,n\}$: $x_k=0$ lub $x_k=1$.

11. Odcinek AD jest wysokością trójkąta ostrokątnego ABC. Punkt E jest rzutem prostokątnym punktu D na prostą AB, a punkt F jest rzutem prostokątnym punktu D na prostą AC. Punkt M jest środkiem odcinka AB, a N — środkiem odcinka AC. Proste MF, EN przecinają się w punkcie S. Dowieść, że środek okręgu opisanego na trójkącie ABC leży na prostej SD.

12. Niech α będzie taką liczbą rzeczywistą, że $\mathrm{tg}(\alpha\cdot\pi)=\sqrt{2}$. Rozstrzygnąć, czy α musi być liczbą wymierną.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

30 listopada 2016 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.
Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą szkoły i jej adresem.

Adresy Komitetów Okręgowych Olimpiady Matematycznej

- Dla województwa pomorskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego,
ul. Wita Stwosza 57, 80–952 Gdańsk.
- Dla województwa śląskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego,
ul. Bankowa 14, 40-007 Katowice.
- Dla województwa małopolskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego,
ul. Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków.
- Dla województwa lubelskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Zakład Rachunku Prawdopodobieństwa pok. 810, Instytut Matematyki Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej,
pl. Marii Curie-Skłodowskiej 1, 20-031 Lublin.
- Dla województwa łódzkiego i świętokrzyskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego,
ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.
- Dla województwa wielkopolskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Adama Mickiewicza,
ul. Umultowska 87, 61-614 Poznań.
- Dla województwa podkarpackiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Katedra Matematyki Politechniki Rzeszowskiej,
al. Powstańców Warszawy 8, 35-959 Rzeszów.
- Dla województwa lubuskiego i zachodniopomorskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Szczecińskiego,
ul. Wielkopolska 15, 70-451 Szczecin.
- Dla województwa kujawsko-pomorskiego i warmińsko-mazurskiego:
— Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.
- Dla województwa mazowieckiego i podlaskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk,
ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa.
- Dla województwa dolnośląskiego i opolskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego,
pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: www.om.edu.pl