LXVIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego
I seria: 1 września — 30 września 2016 r.

1. Rozstrzygnąć, czy istnieją takie trzy różne, niezerowe liczby rzeczywiste a, b, c, że spośród liczb
$$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}, \quad \frac{b+c}{b^2+bc+c^2}, \quad \frac{c+a}{c^2+ca+a^2}$$
pewne dwie są równe, a trzecia jest od nich różna.

Autor zadania: Kamil Rychlewicz

Rozwiązanie

Zachodzi równość $(a+b)(b^2+bc+c^2)-(b+c)(a^2+ab+b^2)=$
$=b^2(a+b-b-c)+c(a+b)(b+c)-a(b+c)(a+b)=$
$=(c-a)\big((a+b)(b+c)-b^2\big)=(c-a)(ab+bc+ca)$.

Wobec tego
$$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}-\frac{b+c}{b^2+bc+c^2}=\frac{(c-a)(ab+bc+ca)}{(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)}\,.$$
Analogicznie
$$\frac{b+c}{b^2+bc+c^2}-\frac{c+a}{c^2+ca+a^2}=\frac{(a-b)(ab+bc+ca)}{(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)} \quad \text{oraz}$$
$$\frac{c+a}{c^2+ca+a^2}-\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}=\frac{(b-c)(ab+bc+ca)}{(c^2+ca+a^2)(a^2+ab+b^2)}\,.$$
Jeśli więc zachodzi równość $ab+bc+ca=0$, to wszystkie trzy liczby są równe. Jeśli $ab+bc+ca\neq 0$, to z założenia, że $a\neq b\neq c\neq a$ wynika,
$$\text{że } \frac{a+b}{a^2+ab+b^2}\neq\frac{b+c}{b^2+bc+c^2}\neq\frac{c+a}{c^2+ca+a^2}\neq\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}.$$

Wobec tego jeśli dwie spośród liczb $\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}$, $\frac{b+c}{b^2+bc+c^2}$, $\frac{c+a}{c^2+ca+a^2}$ są równe, to trzecia też. $\square$

Rozwiązanie drugie

Z równości $\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}=\frac{b+c}{b^2+bc+c^2}$ wynika, że $\frac{a^2-b^2}{a^3-b^3}=\frac{b^2-c^2}{b^3-c^3}$ — rozszerzyliśmy oba ułamki, a z tej równości wynika, że
$$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}=\frac{a^2-b^2}{a^3-b^3}=\frac{b^2-c^2}{b^3-c^3}=\frac{a^2-b^2+b^2-c^2}{a^3-b^3+b^3-c^3}=\frac{a^2-c^2}{a^3-c^3}=\frac{a+c}{a^2+ac+c^2},$$
więc jeśli dwie są równe, to trzecia też. „Po drodze” skorzystaliśmy z tego, że $\frac{w}{x}=\frac{y}{z}\iff\frac{w}{x}=\frac{w+y}{x+z}$, jeśli $x\neq 0,\ z\neq 0,\ x+z\neq 0$. $\square$

2. W skrzyni znajduje się 2017 kul. Na każdej kuli napisana jest dokładnie jedna liczba całkowita. Losujemy ze zwracaniem dwie kule ze skrzyni i dodajemy napisane na nich liczby. Udowodnić, że prawdopodobieństwo otrzymania parzystej sumy jest większe niż $\frac{1}{2}$.

Autor zadania: Mariusz Skałba

Rozwiązanie

Niech n oznacza liczbę tych kul, na których jest napisana liczba nieparzysta, a p — liczbę kul, na których jest napisana liczba parzysta. Par (uporządkowanych) kul, na których napisane zostały liczby tej samej parzystości jest n^2+p^2, a par, na których napisano liczby o różnej parzystości, jest $2np$, więc prawdopodobieństwo otrzymania parzystej sumy jest równe $\frac{n^2+p^2}{2017^2}$, a nieparzystej $\frac{2np}{2017^2}$. Zauważmy, że $n\neq p$, gdyż suma tych dwu liczb całkowitych jest równa 2017, zatem jedna z nich jest nieparzysta, a druga parzysta. W takim razie $n^2+p^2-2np=(n-p)^2>0$, wobec czego $\frac{n^2+p^2}{2017^2}>\frac{2np}{2017^2}$. Tak więc z równości $\frac{n^2+p^2}{2017^2}+\frac{2np}{2017^2}=\frac{(n+p)^2}{2017^2}=\frac{2017^2}{2017^2}=1$ wynika nierówność $\frac{n^2+p^2}{2017^2}>\frac{1}{2}$. $\square$

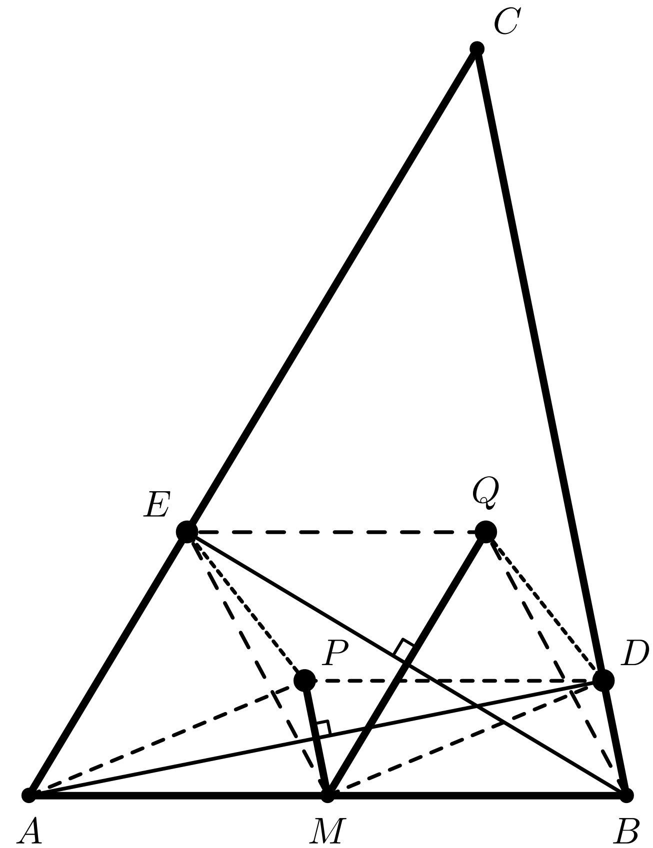
3. Odcinki AD, BE są wysokościami trójkąta ostrokątnego ABC. Punkt M jest środkiem odcinka AB. Punkty P, Q są symetryczne do punktu M odpowiednio względem prostych AD, BE. Wykazać, że środek odcinka DE leży na prostej PQ.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie

Ponieważ M jest środkiem odcinka AB i $MP \perp AD$, więc $MP \parallel BC$. Stąd i z twierdzenia Talesa wynika, że prosta MP przecina odcinek AD w jego środku.

Czworokąt $AMDP$ jest więc rombem. Podobnie czworokąt $BMEQ$ jest rombem. Wynikają stąd równości $EQ = MB = AM = PD$ i zależności $EQ \parallel MB \parallel AM \parallel PD$. Jeśli odcinki PD i EQ leżą na jednej prostej, to teza jest spełniona. Jeśli te odcinki nie leżą na jednej prostej, to czworokąt $PDQE$ jest równoległobokiem i wtedy przekątna DE przecina przekątną PQ w punkcie dzielącym każdą z nich na połowy i teza też jest spełniona.



4. Niech t będzie liczbą z przedziału $(0,1)$. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b zachodzi nierówność

$$|a+(1+t)b|+|a+(1-t)b| \geqslant \frac{2t}{2+t} \cdot (|a|+|b|)\,.$$

Autor zadania: Michał Strzelecki

Rozwiązanie

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b i $t \in (0,1)$ zachodzą nierówności:

$$|a+(1+t)b|+|a+(1-t)b| \geqslant |a+(1+t)b+a+(1-t)b| = \\ = 2|a+b| \geqslant 2|a|-2|b|$$

oraz

$$|a+(1+t)b|+|a+(1-t)b| = \\ = |a+(1+t)b|+|-a-(1-t)b| \geqslant |a+(1+t)b-a-(1-t)b| = 2t|b|.$$

Otrzymujemy wobec tego

(1) $\quad |a+(1+t)b|+|a+(1-t)b| \geqslant 2|a|-2|b|$

oraz

(2) $\quad |a+(1+t)b|+|a+(1-t)b| \geqslant 2t|b|.$

Dodając do nierówności (1) pomnożonej przez $\frac{t}{2+t}$ nierówność (2) pomnożoną przez $\frac{2}{2+t}$ otrzymujemy

$$|a+(1+t)b|+|a+(1-t)b| \geqslant \tfrac{t}{2+t}\cdot(2|a|-2|b|)+\tfrac{2}{2+t}\cdot 2t|b| = \tfrac{2t}{2+t}\,(|a|+|b|),$$

czyli tezę. $\square$

II seria: 1 października — 31 października 2016 r.

5. Wykazać, że istnieje liczba naturalna n, która ma więcej niż 2017 dzielników d spełniających warunek

$$\sqrt{n} \leqslant d < 1,01\sqrt{n}.$$

Autor zadania: Mariusz Skałba

Rozwiązanie

Niech k będzie taką liczbę naturalną, że

$$\left(\tfrac{k+1}{k}\right)^{2017} = \left(1+\tfrac{1}{k}\right)^{2017} < 1{,}01.$$

Nierówność ta może być przepisana w formie

$$\frac{1}{k} < \sqrt[2017]{1{,}01}-1 \quad \text{czyli} \quad k > \frac{1}{\sqrt[2017]{1{,}01}-1}\,,$$

więc taka liczba k istnieje.

Przyjmijmy $n = (k(k+1))^{2\cdot 2017}$. Wówczas

$$\sqrt{n} = (k(k+1))^{2017} < k^{2016}(k+1)^{2018} < k^{2015}(k+1)^{2019} < \ldots < \\ < k(k+1)^{4033} < (k+1)^{4034}.$$

Liczby w tym ciągu są postaci $k^j(k+1)^{4034-j}$, gdzie $j \leqslant 2017$ oznacza nieujemną liczbę całkowitą. Każda z nich jest dzielnikiem liczby n oraz spełnia żądane oszacowanie:

$$k^j(k+1)^{4034-j} = \sqrt{n}\cdot\left(\frac{k+1}{k}\right)^{2017-j} \leqslant \sqrt{n}\cdot\left(\frac{k+1}{k}\right)^{2017} < 1{,}01\sqrt{n}\,.$$

Dowód został zakończony. $\square$

6. W balu uczestniczyło 20 kawalerów i 20 dam. W każdym z 99 tańców tańczyła dokładnie jedna para, za każdym razem inna. W każdej parze tańczyła dama z kawalerem. Dowieść, że istnieje takich dwóch kawalerów i takie dwie damy, że każdy z tych dwóch kawalerów zatańczył z obiema tymi damami.

Autor zadania: Nguyen Hung Son

Rozwiązanie

Tańczyło 20 dam: $D_1, D_2, \ldots, D_{20}$. Można z nich utworzyć $\binom{20}{2} = 190$ par (nieuporządkowanych). Każdy z kawalerów $K_1, K_2, \ldots, K_{20}$ tańczył z pewną liczbą dam. Przyjmijmy, że z kawalerem K_i zatańczyło k_i dam. Z nich można utworzyć $\frac{k_i(k_i-1)}{2}$ par (jest tak również dla $k_i = 0$ oraz $k_i = 1$). Wszystkich par dam można więc utworzyć

$$\frac{k_1(k_1-1)}{2} + \frac{k_2(k_2-1)}{2} + \frac{k_3(k_3-1)}{2} + \ldots + \frac{k_{20}(k_{20}-1)}{2}.$$

Tańców było 99, zatem $k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_{20} = 99$. Zauważmy, że

$$\tfrac{1}{2}\big(k_1(k_1-1) + k_2(k_2-1) + \ldots + k_{20}(k_{20}-1)\big) =$$
$$= \tfrac{1}{2}\big((k_1-4)(k_1-5) + (k_2-4)(k_2-5) + \ldots + (k_{20}-4)(k_{20}-5) + {} + 8(k_1 + k_2 + \ldots + k_{20}) - 20\cdot 20\big) =$$
$$= \tfrac{1}{2}\big((k_1-4)(k_1-5) + (k_2-4)(k_2-5) + \ldots + {} + (k_{20}-4)(k_{20}-5) + 8\cdot 99 - 20\cdot 20\big) =$$
$$= \tfrac{1}{2}\big((k_1-4)(k_1-5) + (k_2-4)(k_2-5) + \ldots + {} + (k_{20}-4)(k_{20}-5) + 392\big) \geqslant 196,$$

bo wyrażenie $(x-4)(x-5)$ przyjmuje wartości ujemne tylko dla $x \in (4,5)$, zatem dla każdej liczby całkowitej k mamy $(k-4)(k-5) \geqslant 0$. Stąd i z nierówności $196 > 190$ wynika, że pewnym dwóm kawalerom odpowiada ta sama para dam, a to właśnie jest teza twierdzenia, które należało uzasadnić. □

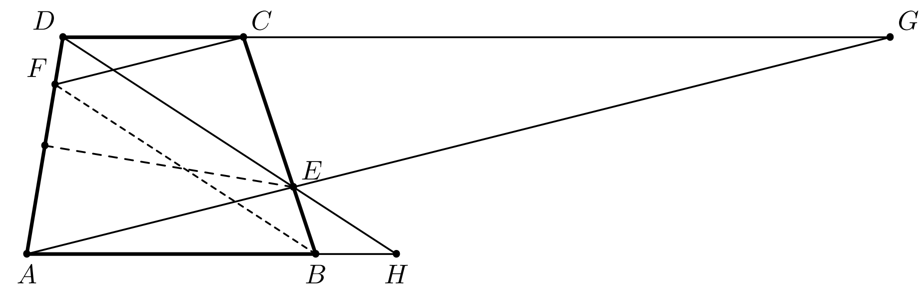
Uwaga – zagadka. Gdybyśmy założyli, że odbyto 98 tańców, teza też byłaby prawdziwa, nierówność $196 > 190$ zastąpilibyśmy taką $192 > 190$. A jak byłoby, gdyby tańców było jedynie 97?

7. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD. Symetralna boku AD przecina odcinek BC w punkcie E. Prosta równoległa do prostej AE, przechodząca przez punkt C, przecina odcinek AD w punkcie F. Dowieść, że

$$\sphericalangle AFB = \sphericalangle CFD.$$

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie



Niech G oznacza punkt wspólny prostych AE i DC, a H — punkt wspólny prostych DE i AB. Trójkąty ABE i GCE są podobne, bo proste AB i GC są równoległe, zatem $\frac{GC}{EC} = \frac{AB}{EB}$. Podobnie z podobieństwa trójkątów BHE i CDE wynika równość $\frac{EC}{CD} = \frac{EB}{BH}$. Ponadto $\frac{AF}{FD} = \frac{GC}{CD}$, bo proste FC i AE są równoległe. Z tych równości wnioskujemy, że

$$\frac{AF}{FD} = \frac{GC}{CD} = \frac{GC}{EC}\cdot\frac{EC}{CD} = \frac{AB}{EB}\cdot\frac{EB}{BH} = \frac{AB}{BH}.$$

Stąd i z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wynika, że proste BF i DE są równoległe, więc $\sphericalangle AFB = \sphericalangle ADE$. Punkt E leży na symetralnej odcinka AD, zatem $\sphericalangle ADE = \sphericalangle DAE$ i wreszcie $\sphericalangle DAE = \sphericalangle DFC$, bo proste AE i FC są równoległe. Z ostatnich trzech równości wynika, że kąty AFB i DFC są równe. Teza została wykazana. □

8. Dane są liczby całkowite a, b, c. Udowodnić, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, że liczba $n^3 + an^2 + bn + c$ nie jest kwadratem liczby całkowitej.

Autor zadania: Nguyen Hung Son

Rozwiązanie

Załóżmy, wbrew tezie zadania, że dla każdej liczby całkowitej $n > 0$ wartość wyrażenia $n^3 + an^2 + bn + c$ jest kwadratem liczby całkowitej. Istnieją więc takie liczby całkowite k, ℓ, m, n, że

$$1 + a + b + c = k^2\,,$$

$$8 + 4a + 2b + c = \ell^2\,,$$

$$27 + 9a + 3b + c = m^2\,,$$

$$64 + 16a + 4b + c = n^2\,.$$

Po odjęciu stronami pierwszej równości od trzeciej i drugiej od czwartej otrzymujemy

$$m^2 - k^2 = 26 + 8a + 2b \quad \text{oraz} \quad n^2 - \ell^2 = 56 + 12a + 2b\,.$$

Liczby $m^2 - k^2$ i $n^2 - \ell^2$ są więc parzyste. Z równości

$$m^2 - k^2 = (m-k)(m+k)$$

wynika, że co najmniej jeden z czynników $m-k$, $m+k$ jest parzysty. Ponieważ ich suma $m - k + m + k = 2m$ jest parzysta, więc drugi też jest parzysty, zatem liczba $m^2 - k^2$ jest podzielna przez 4. Podobnie liczba $n^2 - \ell^2$. Wobec tego przez 4 dzieli się liczba

$$n^2-\ell^2-(m^2-k^2) = 56+12a+2b-(26+8a+2b) = 30+4a = 4(a+7)+2\,.$$

Jednak ona z dzielenia przez 4 daje resztę 2. Otrzymana sprzeczność kończy dowód. □

9. Wykazać, że równanie

$$\left(x^2 + 2y^2\right)^2 - 2\left(z^2 + 2t^2\right)^2 = 1$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych x, y, z, t.

Autor zadania: Mariusz Skałba

Rozwiązanie

Zachodzi równość

$$(1^2 + 2\cdot 1^2)^2 - 2\cdot(0^2 + 2\cdot 1^2)^2 = 1\,,$$

więc czwórka $(1,1,0,1)$ jest rozwiązaniem równania.

Załóżmy następnie, że dla czwórki (x, y, z, t) nieujemnych liczb całkowitych spełnione są warunki $u = x^2 + 2y^2 > 0$, $v = z^2 + 2t^2 > 0$ oraz $u^2 - 2v^2 = 1$. Wtedy

$$(u^2 + 2v^2)^2 - 2(2uv)^2 = (u^2 - 2v^2)^2 = 1$$

oraz $2uv = 2(x^2 + 2y^2)(z^2 + 2t^2) = 2x^2z^2 + 4y^2z^2 + 4x^2t^2 + 8y^2t^2 = (2xt-2yz)^2+2(xz+2yt)^2$, więc czwórka nieujemnych liczb całkowitych $(u, v, 2|xt-yz|, xz+2yt)$ też spełnia równanie. Nie pokrywa się ona z czwórką (x, y, z, t), bo zachodzi nierówność $u > x$, gdyż $v > 0$, więc $u^2 > 1$, zatem $u > 1$ czyli $x > 1$ lub $y > 0$. Zachodzą też nierówności $u^2 + 2v^2 > 0$ i $|2xt - 2yz|^2 + 2(xz + 2yt)^2 = 2uv > 0$. Można więc powtórzyć rozumowanie (indukcja) i w ten sposób wskazać nieskończenie wiele różnych rozwiązań w liczbach całkowitych badanego równania. □

Uwaga. Równanie $r^2 - ds^2 = 1$, z parametrem całkowitym $d > 0$ i niewiadomymi r, s, zwane równaniem Pella, jest dobrze zbadane. Wiadomo jak wyglądają jego rozwiązania w liczbach całkowitych. W zadaniu $d = 2$, ale od rozwiązań wymagana jest dodatkowa własność: liczby całkowite r, s mają być bardzo szczególnej postaci. Można udowodnić, że jeśli $r, s > 0$ i $r^2 - 2s^2 = 1$, to istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, że $r = \frac{1}{2}\big((3+2\sqrt{2}\,)^n + (3-2\sqrt{2}\,)^n\big)$, a $s = \frac{1}{2\sqrt{2}}\big((3+2\sqrt{2}\,)^n - (3-2\sqrt{2}\,)^n\big)$. Liczba $r = \frac{1}{2}\big((3+2\sqrt{2}\,)^n + (3-2\sqrt{2}\,)^n\big) = \frac{1}{2}\Big(\big((1+\sqrt{2}\,)^n\big)^2 + \big((1-\sqrt{2}\,)^n\big)^2\Big) = \frac{1}{2}\Big(\big(p+q\sqrt{2}\big)^2 + \big(p-q\sqrt{2}\big)^2\Big) = p^2+2q^2$ jest odpowiedniej postaci: tu p, q są takimi liczbami całkowitymi, że $(1+\sqrt{2}\,)^n = p+q\sqrt{2}$, więc $(1-\sqrt{2}\,)^n = p-q\sqrt{2}$. Jednak tego samego nie można powiedzieć o liczbie $s = \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\big(p+q\sqrt{2}\big)^2 - \big(p-q\sqrt{2}\big)^2\Big) = 2pq$ – ona nie musi być tej postaci. W rozwiązaniu wykazaliśmy, że jeśli n jest potęgą liczby 2, to liczby r, s są postaci x^2+2y^2. Autor zadania potrafi dowieść, że dla $n = 257$, więc nie dla potęgi dwójki, ta liczba też jest postaci x^2+2y^2. W tym wypadku liczba $p = 118\,119\,373\,866\,262\,081\,485\,223\,899\,617\,886\,417\,593\,271\,902\,402\,645\,222\,441\,921\,910\,431\,040\,354\,300\,019\,446\,804\,767\,966\,058\,309\,121$ jest pierwsza a liczba $q = 1\,640\,689 \cdot 623\,700\,659\,351\,936\,833 \cdot 81\,621\,330\,294\,770\,651\,861\,320\,888\,171\,562\,587\,614\,620\,304\,100\,785\,844\,883\,920\,376\,945\,100\,294\,097$ jest iloczynem trzech liczb pierwszych. Każda z tych czterech liczb pierwszych z dzielenia przez 8 daje resztę 1, a nieparzysta liczba pierwsza, która z dzielenia przez 8 daje resztę 1 lub 3 może być zapisana w postaci x^2+2y^2 (w odróżnieniu od pozostałych nieparzystych liczb pierwszych). □

10. Dla ustalonej dodatniej liczby całkowitej n rozważamy równanie

$$x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n = n,$$

w którym niewiadome $x_1, \ldots, x_n$ mogą przybierać wartości całkowite nieujemne. Dowieść, że to równanie ma tyle samo rozwiązań $(x_1, \ldots, x_n)$, spełniających warunek

(1) dla każdego $k \in \{1, \ldots, n-1\}$: $x_k > 0$ lub $x_{k+1} = 0$,

ile ma rozwiązań $(x_1, \ldots, x_n)$, spełniających warunek

(2) dla każdego $k \in \{1, \ldots, n\}$: $x_k = 0$ lub $x_k = 1$.

Autor zadania: Marcin Kuczma

Rozwiązanie

Rozważajmy ciągi $(x_1, \ldots, x_n)$ o wyrazach całkowitych nieujemnych (niekoniecznie spełniające równanie $x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n = n$), o sumie wyrazów nie przekraczającej n. Warunek (1) oznacza, że ciąg $(x_1, \ldots, x_n)$ ma do pewnego miejsca wyrazy dodatnie, a po nich zera. Weźmy dowolny taki ciąg $(x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$; $1 \leqslant m \leqslant n$; $x_k > 0$ dla $k \geqslant m$. Niech $s_i = x_i + \ldots + x_n$. Wówczas

(3) $$s_1 > \ldots > s_m > 0 = s_{m+1} = s_{m+2} = \ldots = s_n \quad .$$

Każdemu ciągowi ciągiem $(x_1, \ldots, x_n)$ przypisaliśmy jeden ciąg $(s_1, \ldots, s_n)$. Każdemu ciągowi $(s_1, s_2, \ldots, s_m, s_{m+1}, \ldots, s_n)$, który spełnia warunek (3) odpowiada dokładnie jeden ciąg $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, którego pierwszych m wyrazów to dodatnie liczby całkowite, po których następują zera: $x_1 = s_1 - s_2$, $x_2 = s_2 - s_3$,…,$x_{n-1} = s_{n-1} - s_n$, $x_n = s_n$. Teraz ciągowi $(s_1, \ldots, s_m, 0, \ldots, 0)$, przypisujemy ciąg zero-jedynkowy $(y_1, \ldots, y_n)$ wpisując jedynki na miejscach o numerach $s_1, s_2, \ldots, s_m$, tzn. $y_{s_i} = 1$, a na pozostałych miejscach 0. Na przykład, jeśli $n = 24$, $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $x_3 = 4$ oraz $x_4 = x_5 = \ldots = x_{24} = 0$, to $s_1 = 2+5+4 = 11$, $s_2 = 5+4 = 9$, $s_3 = 4$, $s_4 = s_5, \ldots, s_{24} = 0$. Wtedy $y_{11} = y_9 = y_4 = 1$ oraz $y_i = 0$ dla $i \notin \{4, 9, 11\}$, więc z ciągu $(2, 5, 4, \underbrace{0, \ldots, 0}_{\text{21 zer}})$ powstaje ciąg $(0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,1,\underbrace{0, \ldots, 0}_{\text{13 zer}})$.

Procedura ta jest odwracalna. Z ciągu $(y_1, \ldots, y_n)$ złożonego z zer i jedynek tworzymy ciąg $s_1, s_2, \ldots, s_n$ wypisując kolejno numery jedynek w danym ciągu w kolejności malejącej, a po nich zera.

Wystarczy teraz wykazać, że albo oba ciągi $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ oraz $(y_1, y_2 \ldots, y_n)$ spełniają zadane równanie, albo oba go nie spełniają. Zachodzi równość $\sum_{j=1}^{n} jy_j = \sum_{i=1}^{n} s_i$, bo $jy_j = j$, gdy $y_j = 1$ i wtedy $j = s_i$ dla odpowiedniego i. Poza tym $\sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=i}^{n} x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} kx_k$. Dowód został zakończony. □

11. Odcinek AD jest wysokością trójkąta ostrokątnego ABC. Punkt E jest rzutem prostokątnym punktu D na prostą AB, a punkt F jest rzutem prostokątnym punktu D na prostą AC. Punkt M jest środkiem odcinka AB, a N — środkiem odcinka AC. Proste MF, EN przecinają się w punkcie S. Dowieść, że środek okręgu opisanego na trójkącie ABC leży na prostej SD.

Autorzy zadania: Dominik Burek i Tomasz Cieśla

Rozwiązanie

Ponieważ w zadaniu wystepują w zasadzie jedynie proste lub odcinki, proste do nich prostopadłe i proste przechodzące przez dwa punkty, więc najpierw zadanie rozwiążemy analitycznie.

Bez straty ogólności można przyjąć, że wierzchołkami trójkąta są punkty $A = (0, 2)$, $B = (2b, 0)$, $C = (2c, 0)$ i $b < 0 < c$. Wtedy $D = (0, 0)$. Równanie prostej AB wygląda tak: $x + by = 2b$, zatem równanie prostej DE tak: $bx - y = 0$. Niech $E = (x_E, y_E)$. Rozwiązując ten układ równań otrzymujemy $x_E = \frac{2b}{1+b^2}$, $y_E = bx_E = \frac{2b^2}{1+b^2}$, czyli $E = \left(\frac{2b}{1+b^2}, \frac{2b^2}{1+b^2}\right)$. Podobnie uzasadniamy, że $F = \left(\frac{2c}{1+c^2}, \frac{2c^2}{1+c^2}\right)$. Oczywiście $M = (b, 1)$ i $N = (c, 1)$. Równania prostych MF i NE wyglądają więc tak:

$$y = \frac{\frac{2c^2}{1+c^2} - 1}{\frac{2c}{1+c^2} - b}(x - b) + 1 = \frac{c^2 - 1}{2c - b(1 + c^2)}(x - b) + 1\,.$$

$$y = \frac{\frac{2b^2}{1+b^2} - 1}{\frac{2b}{1+b^2} - c}(x - c) + 1 = \frac{b^2 - 1}{2b - c(1 + b^2)}(x - c) + 1\,.$$

Można przepisać je w postaci:

$$(c^2 - 1)x + (b + bc^2 - 2c)y = b(c^2 - 1) + b(1 + c^2) - 2c = 2c(bc - 1),$$
$$(b^2 - 1)x + (c + b^2c - 2b)y = c(b^2 - 1) + c(1 + b^2) - 2b = 2b(bc - 1).$$

Odejmując od pierwszego pomnożonego przez b drugie pomnożone przez c otrzymujemy równość

$$0 = x(bc^2 - b - b^2c + c) + y(b^2 + b^2c^2 - 2bc - c^2 - b^2c^2 + 2bc) =$$
$$= (c - b)(bc + 1)x + (b^2 - c^2)y = (c - b)\big((bc + 1)x - (b + c)y\big),$$

zatem współrzędne punktu S spełniają równanie

$$(bc + 1)x - (b + c)y = 0. \qquad (S)$$

Jest to równanie prostej, jeśli $bc + 1 \neq 0$ lub $b + c \neq 0$, czyli gdy $b \neq -1$ lub $c \neq 1$, ale tak jest, bo $\sphericalangle BAC \neq 90°$, więc $bc + 1 \neq 0$.

Równaniem symetralnej odcinka AB jest $bx - y = b^2 - 1$, a symetralnej odcinka AC: $cx - y = c^2 - 1$. Współrzędne punktu O, czyli środka okręgu opisanego na trójkącie ABC, spełniają więc równanie

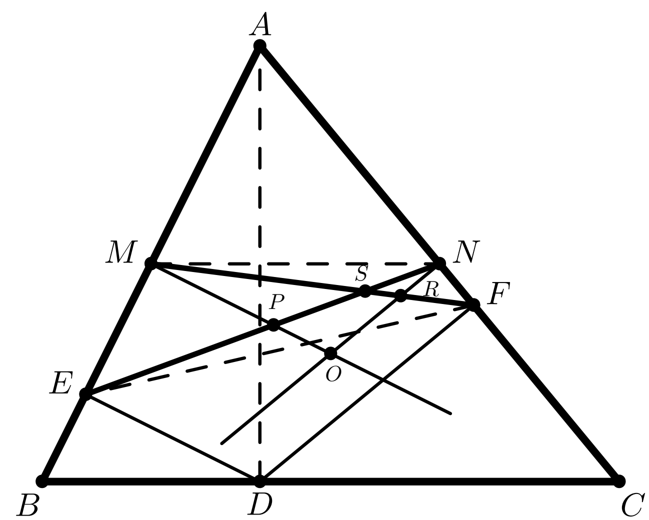
$$0 = \big(b(c^2 - 1) - c(b^2 - 1)\big)x + \big(b^2 - 1 - (c^2 - 1)\big)y =$$
$$= (c - b)\big((1 + bc)x - (b + c)y\big),$$

czyli
$$(1 + bc)x - (b + c)y = 0.$$

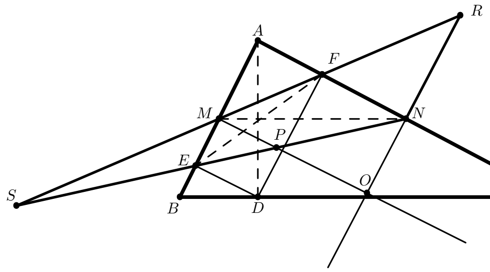
Otrzymaliśmy znów równanie (S), a ponieważ $D = (0, 0)$, więc punkty D, S, O leżą na prostej o równaniu (S). Dowód został zakończony. □

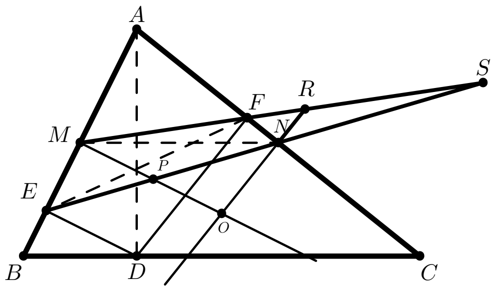
Drugie rozwiązanie

Niech P oznacza punkt wspólny prostych MO i EN a R punkt wspólny prostych NO i FM. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że $\sphericalangle DAB \leqslant \sphericalangle DAC$, więc $\sphericalangle DAB \leqslant \frac{\sphericalangle DAB + \sphericalangle DAC}{2} = \frac{\sphericalangle BAC}{2} < 45°$. Punkt E leży więc między punktami B i M. Zachodzi równość $\sphericalangle ADF = \sphericalangle DCA$, bo $\sphericalangle ADF + \sphericalangle FAD = 90° = \sphericalangle DCA + \sphericalangle FAD$. Podobnie $\sphericalangle ADE = \sphericalangle DBA$.



Punkty A, E, D i F leżą na okręgu o średnicy AD, zatem $\sphericalangle AEF = \sphericalangle ADF = \sphericalangle DCA$ i $\sphericalangle AFE = \sphericalangle ADE = \sphericalangle DBA$. Proste MN i BC są równoległe, więc $\sphericalangle AMN = \sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle ANM = \sphericalangle ACB$. Jeśli $F = N$, czyli $\sphericalangle DAC = 45°$, to $S = N = F$ a prosta DS jest symetralną odcinka AC, więc na niej leży punkt O i teza jest spełniona.





Dalej $N \neq F$. Jeśli punkt F leży między punktami N i C, to $\sphericalangle EMN + \sphericalangle EFN = 180^\circ - \sphericalangle AMN + \sphericalangle EFA = 180^\circ$, więc na czworokącie $MNEF$ można opisać okrąg. Jeśli punkt F leży na odcinku NA, to zachodzą równości $\sphericalangle MEF = \sphericalangle AEF = \sphericalangle BCA = \sphericalangle MNA$, a stąd wynika, że na czworokącie $MENF$ można opisać okrąg.

Z tego, że przez punkty N, M, E i F przechodzi okrąg wynika równość $\sphericalangle EMS = \sphericalangle FNS$, a z niej, przez odjęcie lub dodanie kąta prostego, równość $\sphericalangle PMS = \sphericalangle RNS$. Jeśli $\sphericalangle PMS = \sphericalangle RNS = 0^\circ$, to prosta SM jest symetralną odcinka AB a prosta SN — symetralną odcinka AC i wtedy $O = S$, więc twierdzenie jest prawdziwe. Dalej zakładamy, że $\sphericalangle PMS = \sphericalangle RNS \neq 0^\circ$. Trójkąty SMP i SNR są podobne, bo ich odpowiednie kąty są równe. Podobne są również trójkąty SMN i SEF. Wobec tego $\frac{SR}{SP} = \frac{SN}{SM} = \frac{SF}{SE}$. Jednokładność w skali $\frac{SE}{SP} = \frac{SF}{SR}$ względem punktu S przekształca więc punkt P na punkt E, punkt R na punkt F, prostą PO na równoległą do niej przechodzącą przez punkt E, czyli na prostą ED, prostą OR na prostą DF. Wobec tego punkt wspólny prostych PO i RO, czyli punkt O przechodzi na punkt wspólny prostych ED i FD, więc na punkt D, co dowodzi współliniowości punktów D, O i S.

12. Niech α będzie taką liczbą rzeczywistą, że $\operatorname{tg}(\alpha \cdot \pi) = \sqrt{2}$. Rozstrzygnąć, czy α musi być liczbą wymierną.

Zadanie zaproponował: Michał Krych

Rozwiązanie

Udowodnimy, że liczba α jest niewymierna. Załóżmy, że tak nie jest i niech $\alpha = \frac{p}{q}$, gdzie p i $q > 0$ oznaczają liczby całkowite. Ponieważ dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$, dla której $\operatorname{tg} x$ jest zdefiniowany, zachodzi równość $\operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg} x$, każda z liczb

$$\operatorname{tg}(\alpha\pi),\ \operatorname{tg}(2\alpha\pi),\ \operatorname{tg}(3\alpha\pi), \ldots$$

jest elementem zbioru $\left\{\operatorname{tg} 0,\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{q}\right),\ \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{q}\right), \ldots, \operatorname{tg}\left(\frac{(q-1)\pi}{q}\right)\right\}$.

Niech $p_1 = 1$, $q_1 = 1$ oraz $p_{n+1} = 2p_n q_n$ i $q_{n+1} = q_n^2 - 2p_n^2$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Udowodnimy, że

1° dla każdego n liczba q_n jest nieparzysta,

2° dla każdego n liczby p_n i q_n są względnie pierwsze oraz $p_n \neq 0 \neq q_n$,

3° dla każdego n zachodzi równość $\operatorname{tg}(2^{n-1}\alpha\pi) = \frac{p_n}{q_n}\sqrt{2}$.

Dla $n = 1$ stwierdzenie jest prawdziwe. Jeśli jest prawdziwe dla pewnego n, to liczba $q_{n+1} = q_n^2 - 2p_n^2$ jest nieparzysta, więc $q_{n+1} \neq 0$. Również $p_{n+1} = 2p_n q_n \neq 0$. Jeśli liczba pierwsza k jest wspólnym dzielnikiem liczb p_{n+1} i q_{n+1}, to jest nieparzysta jako dzielnik liczby nieparzystej q_{n+1}. Ponieważ k jest też dzielnikiem liczby $p_{n+1} = 2p_n q_n$, więc jest dzielnikiem jednej z liczb p_n, q_n. Z tego, że k jest nieparzysta i że jest dzielnikiem liczby $q_{n+1} = q_n^2 - 2p_n^2$ wynika, że jest też dzielnikiem drugiej z nich. Wobec tego k jest wspólnym dzielnikiem liczb p_n i q_n, zatem $k = 1$, co jednak przeczy temu, że jest liczbą pierwszą. Jeśli $\operatorname{tg}(2^{n-1}\alpha\pi) = \frac{p_n}{q_n}\sqrt{2}$, to

$$\operatorname{tg}(2^n\alpha\pi) = \frac{2\operatorname{tg}(2^{n-1}\alpha\pi)}{1 - \operatorname{tg}^2(2^{n-1}\alpha\pi)} = \frac{2\frac{p_n}{q_n}\sqrt{2}}{1 - \left(\frac{p_n}{q_n}\sqrt{2}\right)^2} = \frac{2p_n q_n\sqrt{2}}{q_n^2 - 2p_n^2} = \frac{p_{n+1}\sqrt{2}}{q_{n+1}}.$$

Zachodzi również nierówność $|p_{n+1}| = |2p_n q_n| \geqslant |2p_n| > |p_n|$. Wobec tego wszystkie liczby $\frac{p_n}{q_n}\sqrt{2} = \operatorname{tg}(2^{n-1}\alpha\pi)$ są różne. Przeczy to temu, że znajdują się one w zbiorze $\left\{\operatorname{tg} 0, \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{q}\right), \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{q}\right), \ldots, \operatorname{tg}\left(\frac{(q-1)\pi}{q}\right)\right\}$, bo mam on tylko q elementów. □