LXVIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia drugiego

24 lutego 2017 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Wykazać, że dla każdej liczby pierwszej $p > 2$ istnieje dokładnie jedna taka dodatnia liczba całkowita n, że liczba $n^2 + np$ jest kwadratem liczby całkowitej.

2. W trójkącie ostrokątnym ABC dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie D. Punkty P i Q są rzutami prostokątnymi punktu D odpowiednio na proste AB i AC. Dowieść, że pole trójkąta APQ jest równe polu czworokąta $BCQP$ wtedy i tylko wtedy, gdy środek okręgu opisanego na trójkącie ABC leży na prostej PQ.

3. Dane są liczby rzeczywiste $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{2n-1}$, których średnia arytmetyczna równa jest A. Wykazać, że

$$2 \cdot \sum_{i=1}^{2n-1} (x_i - A)^2 \geqslant \sum_{i=1}^{2n-1} (x_i - x_n)^2.$$

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.

LXVIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia drugiego

25 lutego 2017 r. (drugi dzień zawodów)

4. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków AB i AC odpowiednio w punktach D i E. Punkt J jest środkiem okręgu dopisanego do trójkąta ABC, stycznego do boku BC. Punkty M i N są odpowiednio środkami odcinków JD i JE. Proste BM i CN przecinają się w punkcie P. Udowodnić, że punkt P leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC.

Uwaga. Okręgiem dopisanym do trójkąta nazywamy okrąg styczny do jednego z boków i do przedłużeń dwóch pozostałych.

5. Smakosz Jan porównywał n restauracji, gdzie n jest dodatnią liczbą całkowitą. Każdą parę restauracji porównał w dwóch kategoriach: smaczności posiłku oraz jakości obsługi. W przypadku niektórych par Jan nie mógł się zdecydować, którą uważa za lepszą w którejś kategorii, ale w żadnej parze nie zdarzyło się to w obu kategoriach. Ponadto, jeśli Jan uznał, że restauracja A jest lepsza od restauracji B w którejś kategorii, oraz stwierdził, że restauracja B jest lepsza od restauracji C w tej samej kategorii, to uznał również, że A jest lepsza od C w tej kategorii. Udowodnić, że istnieje taka restauracja R, że każda inna restauracja została uznana za gorszą od R w chociaż jednej kategorii.

6. Dana jest liczba pierwsza $p > 2$ oraz liczby $x, y \in \{1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\}$. Wykazać, że jeśli liczba $x(p - x)y(p - y)$ jest kwadratem liczby całkowitej, to $x = y$.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.