LXVIII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia drugiego
24 lutego 2017 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Wykazać, że dla każdej liczby pierwszej $p > 2$ istnieje dokładnie jedna taka dodatnia liczba całkowita n, że liczba $n^2 + np$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Autor zadania: Michał Figlus

Rozwiązanie:

Niech $k > 0$ będzie taką liczbą całkowitą, że $n^2 + np = k^2$. Wtedy

$$0 = 4n(n+p) - 4k^2 = (2n+p)^2 - 4k^2 - p^2 = (2n+p-2k)(2n+p+2k) - p^2.$$

Stąd $p^2 = (2n+p-2k)(2n+p+2k)$. Ponieważ $2n+p+2k > 0$, więc również $2n+p-2k > 0$. Liczba p jest pierwsza oraz $2n+p-2k < 2n+p+2k$, zatem $2n+p-2k$ jest dodatnim dzielnikiem p^2, mniejszym od p, więc $2n+p-2k = 1$ i $2n+p+2k = p^2$. Dodając stronami ostatnie dwie równości otrzymujemy $4n + 2p = p^2 + 1$, czyli $n = (\frac{p-1}{2})^2$. Udowodniliśmy, że jeśli liczba n istnieje, to $n = (\frac{p-1}{2})^2$, więc istnieje nie więcej niż jedno n.

Jeśli $n = (\frac{p-1}{2})^2$, to n jest liczbą całkowitą, bo p jest nieparzyste, oraz

$$n(n+p) = \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 \left(\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 + p\right) = \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 \left(\frac{p+1}{2}\right)^2,$$

zatem $n(n+p) = k^2$ dla $k = \frac{p-1}{2} \cdot \frac{p+1}{2}$. Wobec tego jedyną liczbą całkowitą dla której $n^2 + np$ jest kwadratem liczby całkowitej jest $(\frac{p-1}{2})^2$. □

2. W trójkącie ostrokątnym ABC dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie D. Punkty P i Q są rzutami prostokątnymi punktu D odpowiednio na proste AB i AC. Dowieść, że pole trójkąta APQ jest równe polu czworokąta $BCQP$ wtedy i tylko wtedy, gdy środek okręgu opisanego na trójkącie ABC leży na prostej PQ.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Sposób I: Załóżmy, że prosta AD przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie E i oznaczmy przez M środek odcinka AE (rys. 1).

Pole czworokąta $BCQP$ jest równe polu trójkąta APQ wtedy i tylko wtedy, gdy pole trójkąta APQ stanowi połowę pola trójkąta ABC. Korzystając ze wzoru na pole trójkąta dostajemy równość

$$\frac{1}{2} AP \cdot AQ \cdot \sin \sphericalangle BAC = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \sphericalangle BAC$$

lub równoważnie $2AP \cdot AQ = AB \cdot AC$.

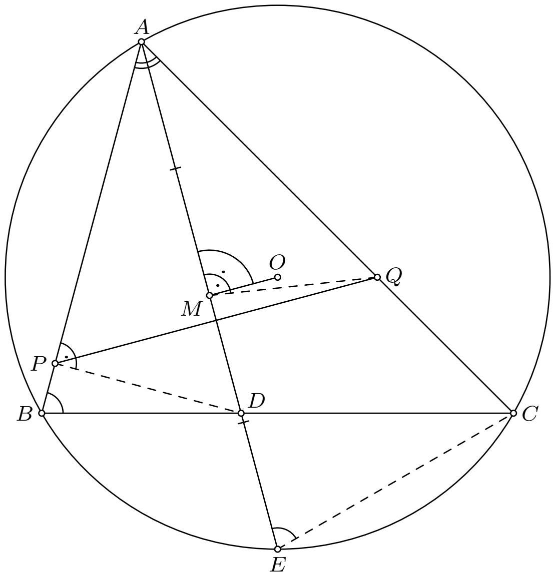
Trójkąty ABD i AEC są podobne, gdyż $\sphericalangle CBA = \sphericalangle CEA$ oraz $\sphericalangle BAD = \sphericalangle DAC$. Wobec tego

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC},$$

więc warunek dany w zadaniu jest równoważny równości $2AP \cdot AQ = AD \cdot AE$.

Ponieważ $AM = ME$, to $AP \cdot AQ = AD \cdot AM$, stąd

$$\frac{AM}{AQ} = \frac{AP}{AD}. \qquad (1)$$

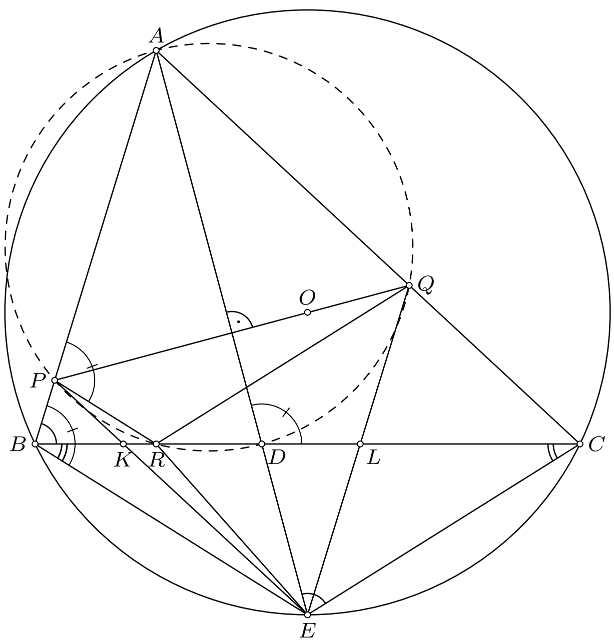


rys. 1

Łącząc (1) z równością $\sphericalangle PAD = \sphericalangle MAQ$, uzyskujemy podobieństwo trójkątów APD i AMQ. W szczególności $\sphericalangle QMA = 90^\circ$ — co jest możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy punkt O leży na prostej PQ. □

Sposób II: Niech E będzie punktem przecięcia prostej AD z okręgiem opisanym na trójkącie ABC, którego środkiem jest punkt O. Ponieważ prosta AE jest dwusieczną kąta BAC to punkty P i Q są symetryczne względem AE, a więc czworokąt $APEQ$ jest deltoidem. Skoro $AO = OE$, to czworokąt ten jest rombem wtedy i tylko wtedy, gdy punkt O leży na prostej PQ.

Bez szkody załóżmy, że $AB < AC$ (jeśli $AB = AC$, to rozumowanie przebiega analogicznie). Z równości $\sphericalangle DPA = \sphericalangle AQD = 90^\circ$ wynika, że na czworokącie $APDQ$ można opisać okrąg. Drugi punkt przecięcia tego okręgu z prostą BC oznaczmy przez R. Niech K i L oznaczają punkt przecięcia prostej BC z prostymi odpowiednio PE i QE (rys. 2). Zauważmy, że



rys. 2

$$\begin{aligned}\sphericalangle EBA = \sphericalangle DBA + \sphericalangle EBC = \sphericalangle CEA + \sphericalangle DCE = \sphericalangle ADC = \\ = 180^\circ - \sphericalangle ADR = \sphericalangle RPA,\end{aligned}$$

więc czworokąt $PBER$ jest trapezem. Analogicznie dowodzimy, że czworokąt $RECQ$ jest trapezem. Wynika stąd, że punkt R leży między punktami K i L.

Pola trójkątów PBR i PER są równe, gdyż trójkąty te mają wspólną podstawę PR i równe wysokości opuszczone na PR. Wobec tego pola trójkątów PBK i RKE też są równe. Podobnie, pola trójkątów REL i QLC są równe. Zatem

$$\begin{aligned}[APEQ] &= [APKLQ] + [KED] + [DEL] = \\ &= [APKLQ] + [RKE] + [REL] = \\ &= [APKLQ] + [PBK] + [QLC] = [ABC],\end{aligned}$$

gdzie symbolem $[\mathcal{F}]$ oznaczyliśmy pole figury $\mathcal{F}$.

Z powyższego rozumowania wynika, że $[BCQP] = [APQ] \iff [APQ] = \frac{1}{2}[ABC] \iff [APQ] = \frac{1}{2}[APEQ]$, co zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy czworokąt $AQEP$ jest rombem. □

3. Dane są liczby rzeczywiste $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{2n-1}$, których średnia arytmetyczna równa jest A. Wykazać, że

$$2 \cdot \sum_{i=1}^{2n-1} (x_i - A)^2 \geqslant \sum_{i=1}^{2n-1} (x_i - x_n)^2.$$

Autor zadania: Marta Strzelecka i Michał Strzelecki

Rozwiązanie:

Sposób I: Zauważmy, że jeżeli zastąpimy liczby $x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1}$ odpowiednio przez $x_1 - A, x_2 - A, \ldots, x_{2n-1} - A$, to nierówność do udowodnienia w zadaniu nie zmieni się, gdyż średnia arytmetyczna nowych liczb wynosi 0. Oznacza to, że nie zmniejszymy ogólności przyjmując $A = 0$.

Przy takim założeniu prawa strona nierówności przyjmuje postać

$$\sum_{i=1}^{2n-1} (x_i - x_n)^2 = \sum_{i=1}^{2n-1} x_i^2 - 2x_n \sum_{i=1}^{2n-1} x_i + (2n-1)x_n^2 = \sum_{i=1}^{2n-1} x_i^2 + (2n-1)x_n^2.$$

Pozostaje wykazać, że $\sum_{i=1}^{2n-1} x_i^2 \geqslant (2n-1)x_n^2$.

Dla $n = 1$ żądana nierówność jest spełniona. Przyjmijmy $n \geqslant 2$ i oznaczmy przez B i C odpowiednio średnią arytmetyczną liczb $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ oraz $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n-1}$. Z założeń zadania wynika, że $B \leqslant x_n \leqslant C$. Ponadto zachodzi równość

$$0 = (2n-1)A = x_n + (n-1)(B + C).$$

Z nierówności między średnią arytmetyczną i kwadratową oraz nierówności trójkąta wynika, że

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2}{n-1}} \geqslant \frac{\sum_{i=1}^{n-1} |x_i|}{n-1} \geqslant \frac{\left|\sum_{i=1}^{n-1} x_i\right|}{n-1} = |B|,$$

stąd $\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \geqslant (n-1)B^2$. Analogicznie dostajemy $\sum_{i=n+1}^{2n-1} x_i^2 \geqslant (n-1)C^2$. Oznacza to, że spełniona jest nierówność

$$\sum_{i=1}^{2n-1} x_i^2 \geqslant x_n^2 + (n-1)(B^2 + C^2).$$

Niech $g(t) = t^2 + (B + C - t)^2$. Ponieważ $g(B) = g(C) = B^2 + C^2$ oraz współczynnik przy t^2 funkcji g jest dodatni, to dla $B \leqslant t \leqslant C$ zachodzi nierówność $g(t) \leqslant B^2 + C^2$. W szczególności skoro $B \leqslant x_n \leqslant C$, to zachodzi nierówność

$$B^2 + C^2 \geqslant g(x_n) = x_n^2 + (B + C - x_n)^2.$$

Z równości $(n-1)(B+C) + x_n = 0$ wynika, że liczby $B + C$ i x_n są przeciwnych znaków, więc $(B + C - x_n)^2 \geqslant x_n^2$. Łącząc otrzymane oszacowania dostajemy $B^2 + C^2 \geqslant 2x_n^2$.

Ostatecznie

$$\sum_{i=1}^{2n-1} x_i^2 \geqslant x_n^2 + (n-1)(B^2 + C^2) \geqslant (2n-1)x_n^2,$$

co było do okazania. □

Sposób II: Zastępując liczby $x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1}$ odpowiednio przez $x_1 - x_n, x_2 - x_n, \ldots, x_{2n-1} - x_n$, możemy bez straty ogólności przyjąć, że $x_n = 0$. Dla $n = 1$ nierówność jest spełniona. Przyjmijmy $n \geqslant 2$. Mamy ciąg równości

$$\begin{aligned}
2\sum_{i=1}^{2n-1}(x_i - A)^2 - \sum_{i=1}^{2n-1}(x_i - x_n)^2 = \sum_{i=1}^{2n-1} x_i^2 - 4A\sum_{i=1}^{2n-1} x_i + 2(2n-1)A^2 = \\
= \frac{2n-3}{2n-1}\sum_{i=1}^{2n-1} x_i^2 - \frac{4}{2n-1}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 2n-1} x_i x_j = \\
= \frac{1}{2n-1}\left(\sum_{i=1}^{2n-1} x_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n-1}(x_i - x_j)^2 + 2\sum_{n+1\leqslant i<j\leqslant 2n-1}(x_i - x_j)^2 - 4\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n-1\\ n+1\leqslant j\leqslant 2n-1}} x_i x_j\right).
\end{aligned}$$

Ponieważ $x_i x_j \leqslant 0$ dla $i \leqslant n \leqslant j$, to powyższa suma jest nieujemna. Oznacza to, że wyjściowa nierówność jest spełniona. □

LXVIII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia drugiego
24 lutego 2017 r. (pierwszy dzień zawodów)

4. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków AB i AC odpowiednio w punktach D i E. Punkt J jest środkiem okręgu dopisanego do trójkąta ABC, stycznego do boku BC. Punkty M i N są odpowiednio środkami odcinków JD i JE. Proste BM i CN przecinają się w punkcie P. Udowodnić, że punkt P leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC.

Uwaga: Okręgiem dopisanym do trójkąta nazywamy okrąg styczny do jednego z boków i do przedłużeń dwóch pozostałych.

Autor zadania: Piotr Ambroszczyk

Rozwiązanie:

Niech F i G będą punktami styczności okręgu dopisanego z zadania z prostymi odpowiednio AB i AC. Ponadto niech K i L oznaczają punkty styczności kolejno okręgów wpisanego i dopisanego z prostą BC (rys. 3).

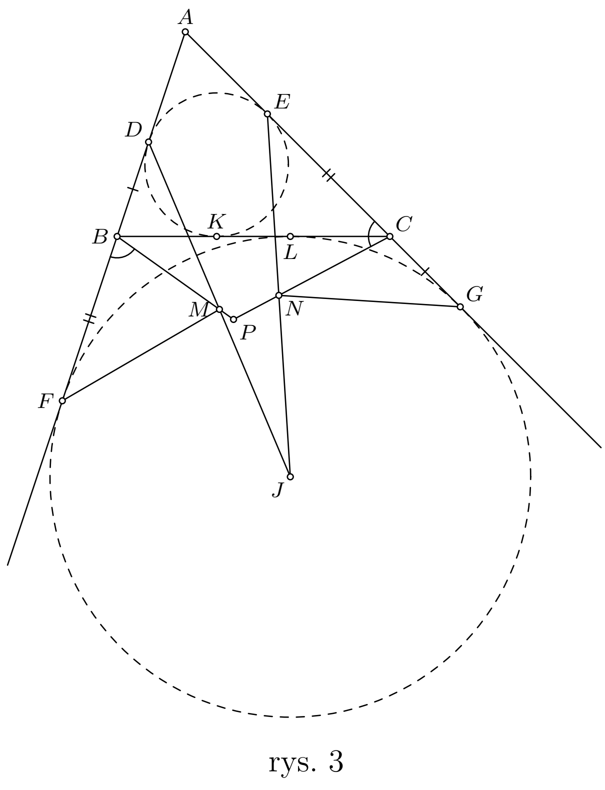
Trójkąty DFM i EGN są symetryczne względem prostej AJ, więc są przystające. Ponadto są one równoramienne, gdyż punkty M i N to środki przeciwprostokątnych odpowiednio trójkątów DFJ i EGJ. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} 2CG = 2AG - 2AC &= AG + AF - 2AC = \\ &= AB + BL + AC + CL - 2AC = AB + BC - AC. \end{aligned}$$

Podobnie

$$2BD = BD + BK = AB - AE + BC - EC = AB + BC - AC,$$

więc $CG = BD$, stąd B i C dzielą boki DF i EG trójkątów DFM i ENG w tym samym stosunku, zatem trójkąty BFM i CEN są przystające. W szczególności $\sphericalangle ECN = \sphericalangle FBM$. Wobec tego $\sphericalangle ACP = 180^\circ - \sphericalangle PBA$ — co oznacza, że punkt P leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC. $\square$



rys. 3

5. Smakosz Jan porównywał n restauracji, gdzie n jest dodatnią liczbą całkowitą. Każdą parę restauracji porównał w dwóch kategoriach: smaczności posiłku oraz jakości obsługi. W przypadku niektórych par Jan nie mógł się zdecydować, którą uważa za lepszą w którejś kategorii, ale w żadnej parze nie zdarzyło się to w obu kategoriach. Ponadto, jeśli Jan uznał, że restauracja A jest lepsza od restauracji B w którejś kategorii, oraz stwierdził, że restauracja B jest lepsza od restauracji C w tej samej kategorii, to uznał również, że A jest lepsza od C w tej kategorii. Udowodnić, że istnieje taka restauracja R, że każda inna restauracja została uznana za gorszą od R w chociaż jednej kategorii.

Autor zadania: Andrzej Grzesik

Rozwiązanie:

Powiemy, że restauracja A jest *wyróżniająca się* w zbiorze restauracji $\mathcal{S}$, jeżeli A jest lepsza w przynajmniej jednej kategorii od każdej restauracji ze zbioru $\mathcal{S} \setminus \{A\}$.

Udowodnimy przez indukcję ze względu na liczbę restauracji, że w każdym niepustym zbiorze restauracji istnieje co najmniej jedna restauracja wyróżniająca się. Jeżeli mamy jedną restaurację to oczywiście jest ona wyróżniająca się. Przypuśćmy, że teza zachodzi dla dowolnego niepustego zbioru restauracji o mocy mniejszej niż n i udowodnijmy, że zachodzi również dla zbioru złożonego z n restauracji.

Oznaczmy zbiór $n \geqslant 2$ restauracji przez $\mathcal{R}$. Wybierzmy dowolną restaurację $A \in \mathcal{R}$. Z założenia indukcyjnego, w zbiorze $\mathcal{R} \setminus \{A\}$ istnieje restauracja wyróżniająca się, nazwijmy ją B. Oznaczmy przez $\mathcal{O}_B$ i $\mathcal{P}_B$ zbiory restauracji z $\mathcal{R}\setminus\{A\}$, które mają odpowiednio gorszą obsługę i gorsze posiłki od B. Oczywiście $\mathcal{O}_B \cup \mathcal{P}_B = \mathcal{R} \setminus \{A, B\}$. Rozważmy wszystkie możliwe wyniki porównania restauracji A i B. Jeżeli B jest lepsza od A w którejkolwiek z kategorii, to B jest wyróżniająca się w $\mathcal{R}$. Jeżeli A jest lepsza w obu kategoriach od B, to A ma również lepszą obsługę od każdej restauracji ze zbioru $\mathcal{O}_B$, oraz lepsze posiłki od każdej restauracji ze zbioru $\mathcal{P}_B$. Oznacza to, że A jest wyróżniająca się w $\mathcal{R}$.

Pozostaje przypadek, w którym A jest lepsza od B w dokładnie jednej kategorii. Bez straty ogólności przyjmijmy, że A ma lepszą obsługę od B. Wówczas A ma również lepszą obsługę od każdej restauracji ze zbioru $\mathcal{O}_B$. Z założenia indukcyjnego w zbiorze $\mathcal{P}_B \cup \{A\}$ istnieje restauracja wyróżniająca się, nazwijmy ją C. Jeżeli $C = A$, to A ma lepszą obsługę od restauracji ze zbioru $\mathcal{O}_B \cup \{B\}$ oraz jest wyróżniająca się w zbiorze $\mathcal{P}_B \cup \{A\}$. Wynika stąd, że A jest wyróżniająca się w $\mathcal{O}_B \cup \{B\} \cup \mathcal{P}_B \cup \{A\} = \mathcal{R}$. Jeżeli zaś $C \neq A$ to C jest lepsza od A w którejś z kategorii. Jeżeli C ma lepsze posiłki od A, to również B ma lepsze posiłki od A, wbrew naszemu założeniu. Jeżeli zaś C jest lepsza od A pod względem obsługi, to C ma lepszą obsługę od każdej restauracji ze zbioru $\{A, B\} \cup \mathcal{O}_B$. Ponadto, z założenia C jest wyróżniająca się w zbiorze $\mathcal{P}_B \cup \{A\}$, oznacza to, że C jest wyróżniająca się w $\{A, B\} \cup \mathcal{O}_B \cup \mathcal{P}_B = \mathcal{R}$. Kończy to dowód tezy indukcyjnej. □

6. Dana jest liczba pierwsza $p > 2$ oraz liczby $x, y \in \{1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\}$. Wykazać, że jeśli liczba $x(p-x)y(p-y)$ jest kwadratem liczby całkowitej, to $x = y$.

Autor zadania: Mariusz Skałba

Rozwiązanie:

Przypuśćmy, że $xy(p-x)(p-y) = k^2$ dla pewnego $k > 0$. Z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną otrzymujemy

$$k^2 = xy(p-x)(p-y) < \left(\frac{x+(p-x)}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{y+(p-y)}{2}\right)^2 = \left(\frac{p^2}{4}\right)^2.$$

Oznacza to, że $k < \frac{p^2}{4}$. Ponieważ $p - x > x$ oraz $p - y > y$, to $k^2 > x^2y^2$ i $k > xy$. Z równości

$$0 = k^2 - xy(p-x)(p-y) = (k-xy)(k+xy) - pxy(p-x-y)$$

wynika, że liczba $(k-xy)(k+xy)$ jest podzielna przez p. Ponieważ p jest liczbą pierwszą, to jedna z liczb $k-xy, k+xy$ jest podzielna przez p. Istnieje więc taka dodatnia liczba całkowita l, że $k-xy = lp$ lub $k + xy = lp$. W pierwszym przypadku otrzymujemy

$$lp(lp + 2xy) = lp(k + xy) = pxy(p - x - y),$$

czyli $p(xy-l^2) = xy(2l+x+y)$. Ze wzorów $lp = k - xy < k < \frac{p^2}{4}$ wynika, że $l < \frac{p}{4}$, więc $2l+x+y < 2\cdot\frac{p}{4}+\frac{p}{2}+\frac{p}{2} = 2p$. Ponieważ $x<p$ i $y<p$, więc p jest dzielnikiem liczby $2l+x+y>0$. Stąd wynika, że $p = 2l+x+y$. Jednak wtedy $p(xy-l^2) = pxy$, zatem $l=0$, czyli $k=xy$, wbrew nierówności $xy<k$.

Z równości $k+xy=lp$ wynika, że

$$lp(lp-2xy) = lp(k-xy) = pxy(p-x-y),$$

czyli $p(xy-l^2) = xy(x+y-2l)$. Ponieważ $x<p$ i $y<p$, więc p jest dzielnikiem liczby $x+y-2l$. Mamy też $lp = k+xy < \frac{p^2}{4}+\frac{p}{2}\cdot\frac{p}{2} = \frac{p^2}{2}$, zatem $l < \frac{p}{2}$. Podobnie jak poprzednio p jest dzielnikiem liczby $x+y-2l$, ale $p > x+y > x+y-2l > -2\cdot\frac{p}{2} = -p$, więc $x+y-2l=0$. Wynika stąd, że $p(xy-l^2)=0$, zatem $xy=l^2$, więc $(x-y)^2 = (x+y)^2-4xy = (2l)^2-4l^2 = 0$, czyli $x=y$, a to należało udowodnić. $\square$

(db,mg)