LXVIII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia trzeciego
3 kwietnia 2017 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Punkty P i Q leżą odpowiednio na bokach AB i AC trójkąta ABC, przy czym spełniona jest równość $BP = CQ$. Odcinki BQ i CP przecinają się w punkcie R. Okręgi opisane na trójkątach BPR i CQR przecinają się ponownie w punkcie S różnym od R. Udowodnić, że punkt S leży na dwusiecznej kąta BAC.

Autor zadania: Dominik Burek

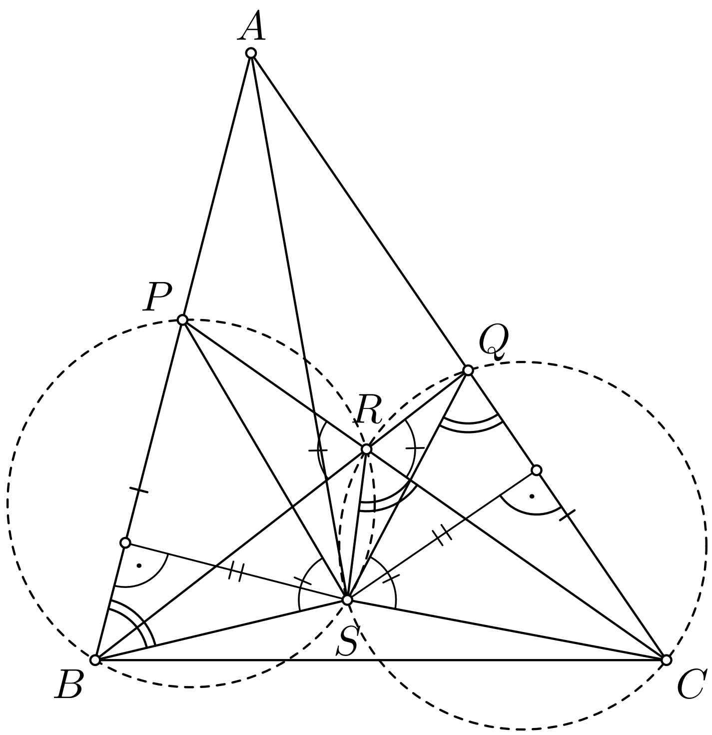
Rozwiązanie:

Pokażemy, że punkt S leży wewnątrz kąta BRC. Przypuśćmy najpierw, że S znajduje się wewnątrz kąta QRP. Wówczas

$$\begin{aligned}\sphericalangle QRP + \sphericalangle PSQ &= \sphericalangle QRP + \sphericalangle PSR + \sphericalangle RSQ = \sphericalangle BRC + \Big(180^\circ - \sphericalangle RBP\Big) + \Big(180^\circ - \sphericalangle QCR\Big) = \\ &= 360^\circ + (180^\circ - \sphericalangle CBR - \sphericalangle RCB) - \sphericalangle RBP - \sphericalangle QCR = 360^\circ + \sphericalangle BAC > 360^\circ.\end{aligned}$$

Oznacza to, że suma miar kątów czworokąta $SPRQ$ jest większa od 360° — sprzeczność. Punkt S nie może również leżeć wewnątrz kąta PRB, gdyż jedynym punktem okręgu opisanego na trójkącie RCQ wspólnym z kątem PRB jest punkt R. Analogicznie punkt S nie może leżeć wewnątrz kąta CRQ. Z powyższych rozważań wynika, że punkty B, S, R, P oraz S, C, Q, R leżą w tej kolejności odpowiednio na okręgach opisanych na trójkątach BRP i CQR.

Równości $\sphericalangle SBP = 180^\circ - \sphericalangle PRS = \sphericalangle SRC = \sphericalangle SQC$ oraz $\sphericalangle PSB = \sphericalangle PRB = \sphericalangle CRQ = \sphericalangle CSQ$ pozwalają stwierdzić, że trójkąty PBS i CQS są podobne, a ponieważ $PB = QC$, to są one przystające. W szczególności wysokości trójkątów PBS i CQS opuszczone z wierzchołka S są równej długości, skąd teza. $\square$



rys. 1

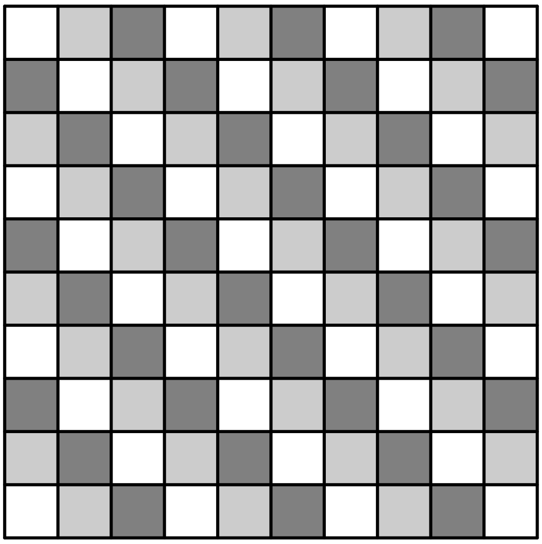
2. Ciąg $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ składający się z parami różnych pól szachownicy o wymiarach $n \times n$ nazwiemy *cyklem*, jeśli $k \geqslant 4$ oraz pola a_i i a_{i+1} mają wspólny bok dla wszystkich $i = 1, 2, \ldots, k$, gdzie $a_{k+1} = a_1$. Podzbiór X pól tej szachownicy nazwiemy *złośliwym*, jeśli każdy cykl na niej zawiera co najmniej jedno pole należące do X.

Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste C o następującej własności: dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 2$ na szachownicy o wymiarach $n \times n$ istnieje zbiór złośliwy składający się z co najwyżej Cn^2 pól.

Autor zadania: Marek Sokołowski

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że wszystkie liczby $C \geqslant \dfrac{1}{3}$ spełniają warunki zadania. Na początku dla dowolnego n wskażemy złośliwy podzbiór pól szachownicy $n \times n$ o mocy nie większej niż $\frac{1}{3}n^2$. W tym celu rozważmy kolorowanie szachownicy trzema kolorami jak na rysunku (rys. 2).



rys. 2

Łatwo zauważyć, że pola w każdym z kolorów tworzą złośliwy podzbiór tej szachownicy. Ponadto liczba pól w pewnym z kolorów jest nie większa niż $\frac{1}{3}n^2$, zatem istotnie wskazaliśmy podzbiór złośliwy składający się z co najwyżej $\frac{1}{3}n^2$ pól.

Wykażemy teraz, że każdy złośliwy podzbiór pól szachownicy $n \times n$ ma co najmniej $\frac{1}{3}(n^2 - 2n)$ pól. Rozważmy pewien złośliwy podzbiór X składający się z k pól. Oszacujmy na dwa sposoby liczbę E par pól spoza zbioru X, mających wspólny bok. W każdym wierszu i w każdej kolumnie znajduje się po $n-1$ par pól mających wspólny bok, wobec tego na całej szachownicy znajduje się $(n+n) \cdot (n-1) = 2n(n-1)$ par pól mających wspólny bok. Każde pole ze zbioru X należy do co najwyżej czterech takich par. Wynika stąd, że $E \geqslant 2n(n-1) - 4k$.

Aby uzyskać górne ograniczenie na liczbę E udowodnimy następujące stwierdzenie: *Jeżeli nie istnieje cykl złożony z pól pewnego m-elementowego zbioru pól szachownicy S, to liczba par pól z S mających wspólny bok jest mniejsza niż m.*

Stosujemy indukcję ze względu na m. Dla $m = 1$ teza jest oczywista. Przypuśćmy, że stwierdzenie jest prawdziwe dla liczb mniejszych od m i udowodnijmy, że jest również prawdziwe dla m. Przypuśćmy, że każde pole należące do zbioru S ma wspólny bok z co najmniej dwoma innymi polami zbioru S. Konstruujemy ciąg pól $p_1, p_2, \ldots$ następująco: p_1 i p_2 są dowolnymi polami mającymi wspólny bok, natomiast dla $i \geqslant 2$ pole p_{i+1} jest dowolnym polem mającym wspólny bok z p_i różnym od p_{i-1}. Ponieważ zbiór S jest skończony, to któreś pole w naszym ciągu powtórzy się. Wybierzmy minimalną taką liczbę całkowitą j, że istnieje $i < j$ spełniające warunek $p_i = p_j$. Wówczas ciąg pól $(p_i, \ldots, p_{j-1})$ jest cyklem, wbrew założeniu, że nie ma cyklu złożonego z pól zbioru S. Oznacza to, że pewne pole p zbioru S ma wspólny bok z co najwyżej jednym innym polem zbioru S, stosując założenie indukcyjne do zbioru $S \setminus \{p\}$ otrzymujemy tezę.

Wróćmy do szacowania liczby E. Ponieważ podzbiór X jest złośliwy, to nie ma cyklu zawierającego jedynie pola spoza X. Korzystając z powyższego faktu dostajemy, że $n^2 - k > E$. Łącząc otrzymane oszacowania dostajemy, że $n^2 - k \geqslant 2n(n-1) - 4k$ czyli $3k \geqslant n^2 - 2n$ lub równoważnie $k \geqslant \frac{1}{3}(n^2 - 2n)$.

Pozostaje zauważyć, że jeżeli $C < \frac{1}{3}$ to dla dostatecznie dużych n spełniona jest nierówność $Cn^2 < \frac{1}{3}(n^2 - 2n)$. Uzyskujemy, że liczby $C < \dfrac{1}{3}$ nie spełniają warunków zadania. □

3. Liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots, a_n$ spełniają nierówności

$$1 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < 2a_1.$$

Udowodnić, że jeśli m jest liczbą różnych dzielników pierwszych iloczynu $a_1 a_2 \ldots a_n$, to

$$(a_1 a_2 \ldots a_n)^{m-1} \geqslant (n!)^m.$$

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Ustalmy dzielnik pierwszy p iloczynu $a_1 a_2 \ldots a_n$. Dla $i = 1, 2, \ldots, n$ niech $a_i = b_i p^{e_i}$, gdzie e_i jest liczbą całkowitą nieujemną, zaś b_i jest liczbą całkowitą niepodzielną przez p.

Udowodnimy, że liczby $b_1, b_2, \ldots, b_n$ są parami różne. Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że $b_i = b_j$ dla pewnych $i < j$. Ponieważ $a_j > a_i$, to otrzymujemy, że $e_j > e_i$ i w konsekwencji $a_j = b_j p^{e_j} \geqslant b_j p^{e_i+1} = pa_i$. Z warunków danych w zadaniu wynika jednak nierówność przeciwna $a_j < 2a_1 \leqslant 2a_i \leqslant pa_i$ i uzyskujemy sprzeczność.

Ponieważ liczby $b_1, b_2, \ldots, b_n$ są parami różnymi dodatnimi liczbami całkowitymi, to zachodzi nierówność

$$b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n \geqslant 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!.$$

Wykażemy, że jeżeli powtórzymy powyższe rozumowanie dla każdego czynnika pierwszego iloczynu $a_1 a_2 \ldots a_n$ i wymnożymy uzyskane nierówności stronami, to otrzymamy żądaną nierówność. Ponieważ iloczyn $a_1 a_2 \ldots a_n$ ma m czynników pierwszych, to prawa strona uzyskanej w opisany powyżej sposób nierówności jest równa $(n!)^m$. Pozostaje wykazać, że lewa strona wynosi $(a_1 a_2 \ldots a_n)^{m-1}$.

Niech $p_1, p_2, \ldots, p_m$ będą czynnikami pierwszymi iloczynu $a_1 a_2 \ldots a_n$. Ustalmy liczbę $1 \leqslant i \leqslant n$ i rozważmy rozkład na czynniki pierwsze $a_i = p_1^{f_1} p_2^{f_2} \ldots p_m^{f_m}$. Mamy równość

$$a_i^{m-1} = \frac{a_i^m}{a_i} = \frac{a_i^m}{p_1^{f_1} p_2^{f_2} \ldots p_m^{f_m}} = \frac{a_i}{p_1^{f_1}} \cdot \frac{a_i}{p_2^{f_2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_i}{p_m^{f_m}}.$$

Czynniki iloczynu po prawej stronie powyższej równości to wartości b_i dla kolejnych liczb pierwszych $p_1, p_2, \ldots, p_m$, Wymnażając powyższą równość dla $i = 1, 2, \ldots, n$ stronami uzyskamy, że rzeczywiście lewa strona naszej nierówności jest równa $(a_1 a_2 \ldots a_n)^{m-1}$. □

LXVIII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia trzeciego
4 kwietnia 2017 r. (drugi dzień zawodów)

4. Wykazać, że zbiór dodatnich liczb całkowitych $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ można przedstawić w postaci sumy pięciu parami rozłącznych podzbiorów o następującej własności: każda piątka liczb postaci $(n, 2n, 3n, 4n, 5n)$, gdzie $n \in \mathbb{Z}^+$, zawiera po jednej liczbie z każdego z tych pięciu podzbiorów.

Zadanie zaproponował: Mariusz Skałba

Rozwiązanie:

Z podstawowego twierdzenia arytmetyki wynika, że dowolną dodatnią liczbę całkowitą n możemy jednoznacznie przedstawić w postaci $n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot m$, gdzie a, b, c są nieujemnymi liczbami całkowitymi, zaś m jest dodatnią liczbą całkowitą niepodzielną przez $2, 3$ i 5.

Funkcję $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}$ definiujemy następująco: jeżeli $n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot m$ jest zapisem liczby n w powyższej postaci, to $f(n) := a + 3b + 4c$. Nietrudno zauważyć, że dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych r, s zachodzi zależność $f(rs) = f(r) + f(s)$.

Udowodnimy, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n liczby $f(n), f(2n), f(3n), f(4n), f(5n)$ dają parami różne reszty z dzielenia przez 5. Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, że dla pewnych $1 \leqslant k < l \leqslant 5$ zachodzi podzielność

$$5 \mid f(ln) - f(kn) = (f(l) + f(n)) - (f(k) + f(n)) = f(l) - f(k).$$

Ponieważ liczby $f(1) = 0, f(2) = 1, f(3) = 3, f(4) = 2, f(5) = 4$ dają parami różne reszty z dzielenia przez 5, to otrzymujemy sprzeczność.

Pozostaje zauważyć, że wobec powyższych rozważań, podział dodatnich liczb całkowitych na pięć podzbiorów w zależności od reszty z dzielenia wartości funkcji f przez pięć spełnia warunki zadania. □

5. Punkt M jest środkiem boku BC trójkąta ABC, w którym $AB = AC$. Punkt D jest rzutem prostokątnym punktu M na bok AB. Okrąg ω jest wpisany w trójkąt ACD i styczny do odcinków AD i AC odpowiednio w punktach K i L. Proste styczne do ω przechodzące przez M przecinają prostą KL w punktach X i Y, przy czym punkty X, K, L, Y leżą w tej kolejności na prostej KL. Udowodnić, że punkty M, D, X, Y leżą na jednym okręgu.

Autor zadania: Piotr Ambroszczyk

Rozwiązanie:

Pokażemy, że punkty A, Y, M, D i X leżą na jednym okręgu. Ze względu na to, że $\measuredangle MDA = 90^\circ$ wystarczy pokazać, że $\measuredangle AYM = 90^\circ$ (równość $\measuredangle AXM = 90^\circ$ wyniknie z symetrii rysunku). Oznaczmy przez I środek okręgu ω a przez N rzut prostokątny punktu D na prostą AM. Niech prosta DN przecina ω w punkcie P, leżącym po tej samej stronie prostej AM jak punkt C.

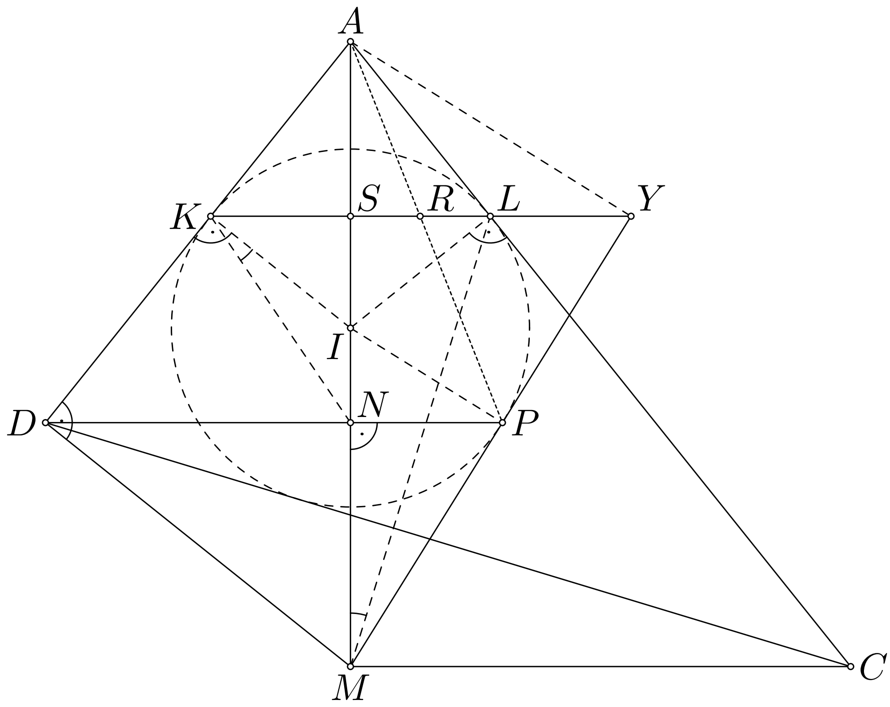
Na czworokątach $IKDN$ oraz $LIMC$ można opisać okrąg, gdyż kąty przy wierzchołkach K, N, L i M są proste, więc

$$\begin{aligned} \measuredangle NKI = \measuredangle NDI = 90^\circ - \measuredangle DIN = 90^\circ - (180^\circ - \measuredangle AID) = \\ = 90^\circ - \frac{1}{2}\Big(\measuredangle DAC + \measuredangle CDA\Big) = \\ = 90^\circ - \frac{1}{2}\Big(180^\circ - \measuredangle ACD\Big) = \measuredangle LCI = \measuredangle LMI. \end{aligned}$$

Ponadto $\measuredangle MIL = \measuredangle KIN$, gdyż punkty K i L są symetryczne względem prostej AI, więc trójkąty IKN i IML są podobne. Zatem

$$\frac{IN}{IP} = \frac{IN}{IK} = \frac{IL}{IM} = \frac{IP}{IM}, \tag{1}$$

co oznacza, że trójkąty PIM i NIP są podobne, stąd $\sphericalangle IPM = 90°$ tzn. prosta MP jest styczna do ω.



rys. 3

Niech S będzie punktem wspólnym prostych AI i KL. Wprowadźmy następujące oznaczenia: $a = AS$, $b = SI$, $c = IN$ oraz $d = NM$. Na podstawie (1) wiemy, że $IN \cdot IM = IP^2 = IL^2$. Trójkąty prostokątne AIL i LIS są podobne, gdyż mają wspólny kąt przy wierzchołku I, stąd dostajemy, że $IS \cdot AI = IL^2$, więc

$$b(a+b) = c(c+d). \tag{2}$$

Z twierdzenia Talesa mamy

$$\frac{AI}{IM} = \frac{AK}{KD} = \frac{AS}{SN},$$

więc $(a+b)(b+c) = a(c+d)$ lub równoważnie

$$b(a+b+c) = (a+b)(b+c) - ac = a(c+d) - ac = ad. \tag{3}$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} SN \cdot MI = (b+c)(c+d) = b(c+d) + c(c+d) &\overset{(2)}{=} \\ \overset{(2)}{=} b(c+d) + b(a+b) = b(a+b+c+d) &= \\ = b(a+b+c) + bd \overset{(3)}{=} ad + bd = d(a+b) &= MN \cdot AI, \end{aligned}$$

więc

$$\frac{MN}{SN} = \frac{MI}{AI}. \tag{4}$$

Ponownie korzystając z twierdzenia Talesa dostajemy

$$\frac{MP}{PY} = \frac{MN}{NS} \overset{(4)}{=} \frac{MI}{AI},$$

czyli na podstawie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa $IP \parallel AY$, jednakże $\sphericalangle IPM = 90°$, stąd $\sphericalangle AYM = 90°$ — co było do pokazania. $\square$

Inne rozwiązanie:

Wiedząc już, że prosta MP jest styczna do ω, w dalszej części dowodu wykorzystamy podstawowe własności biegunowych (zob. L Olimpiada Matematyczna, Sprawozdanie Komitetu Głównego, Warszawa 2000, Dodatek B, str. 107).

Niech R będzie punktem przecięcia prostych AP i KL (rys. 3). Rozpatrujemy biegunowe punktów względem okręgu ω. Punkt Y leży na prostej KL, która jest biegunową punktu A. Zatem punkt A leży na biegunowej Y, jednakże na tej biegunowej leży również punkt P, więc AP jest biegunową punktu Y.

Punkt R jako punkt przecięcia biegunowych punktów A i Y, jest biegunem prostej AY. W szczególności $IR \perp AY$, więc wystarczy pokazać że $IR \parallel MY$. Jednakże jest to konsekwencją twierdzenia Talesa i twierdzenia doń odwrotnego, gdyż

$$\frac{AR}{RP} = \frac{AK}{KD} = \frac{AI}{IM}.$$

□

6. Dane są takie trzy ciągi nieujemnych liczb rzeczywistych $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, $(b_0, b_1, \ldots, b_n)$, $(c_0, c_1, \ldots, c_{2n})$, że dla wszystkich $0 \leqslant i, j \leqslant n$ zachodzi nierówność $a_i b_j \leqslant (c_{i+j})^2$. Wykazać, że

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \sum_{j=0}^{n} b_j \leqslant \left(\sum_{k=0}^{2n} c_k \right)^2 .$$

Autorzy zadania: Marta i Michał Strzeleccy

Rozwiązanie:

Niech a_s będzie maksymalną spośród liczb $a_0, a_1, \ldots, a_n$, zaś b_t będzie maksymalną spośród liczb $b_0, b_1, \ldots, b_n$. Mamy ciąg nierówności

$$\left(\sum_{k=0}^{2n} c_k\right)^2 \geqslant \left(\sum_{k=t}^{t+n} c_k\right)\left(\sum_{k=s}^{s+n} c_k\right) = \left(\sum_{i=0}^{n} c_{i+t}\right)\left(\sum_{j=0}^{n} c_{j+s}\right) \geqslant \left(\sum_{i=0}^{n} \sqrt{a_i b_t}\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \sqrt{a_s b_j}\right) =$$

$$= \sqrt{a_s b_t}\left(\sum_{i=0}^{n} \sqrt{a_i}\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \sqrt{b_j}\right) = \left(\sum_{i=0}^{n} \sqrt{a_i a_s}\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \sqrt{b_t b_j}\right) \geqslant \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \sum_{j=0}^{n} b_j.$$

□

(db,mg)