LXIX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego
I seria: 1 września 2017 r. — 5 października 2017 r.

1. Dane są liczby całkowite a i b oraz liczba pierwsza $p \geqslant 3$. Wykazać, że jeśli liczby $a+b$ oraz a^2+b^2 są podzielne przez p, to liczba a^2+b^2 jest podzielna przez p^2.

2. Dany jest trójkąt ABC, w którym $3AC = AB + BC$. Okrąg dopisany do trójkąta ABC jest styczny do boku AB w punkcie P, zaś do prostej AC w punkcie Q. Wykazać, że kąt CPQ jest prosty.

Uwaga. Okręgiem dopisanym do trójkąta nazywamy okrąg styczny do jednego z boków i do przedłużeń dwóch pozostałych.

3. Znaleźć wszystkie trójki x, y, z liczb rzeczywistych spełniające równania

$$\begin{cases} x^2y + 2 = x + 2yz \\ y^2z + 2 = y + 2zx \\ z^2x + 2 = z + 2xy \end{cases}$$

4. Rozważmy ciąg $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ o wyrazach ze zbioru $\{0,1,2\}$. *Blokiem* będziemy nazywać podciąg postaci $(a_i, a_{i+1}, \ldots, a_j)$, gdzie $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ oraz $a_i = a_{i+1} = \ldots = a_j$. Blok nazywamy *maksymalnym*, jeśli nie jest zawarty w żadnym dłuższym bloku. Przykładowo w ciągu $(1,0,0,0,2,1,1)$ maksymalnymi blokami są (1), $(0,0,0)$, (2), $(1,1)$.

Niech K_n będzie liczba takich ciągów długości n o wyrazach ze zbioru $\{0,1,2\}$, w których wszystkie maksymalne bloki mają nieparzyste długości. Ponadto niech L_n będzie liczbą wszystkich ciagów długości n o wyrazach ze zbioru $\{0,1,2\}$, w których liczby 0 i 2 nie występują na sąsiednich pozycjach. Udowodnić, że $L_n = K_n + \frac{1}{3}K_{n-1}$ dla wszystkich $n > 1$.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

5 października 2017 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane. Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.

LXIX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego
II seria: 6 października 2017 r. — 6 listopada 2017 r.

5. Liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego. Ponadto, są one długościami boków pewnego trójkąta, w którym jeden z kątów ma miarę $120°$. Udowodnić, że trójkąt ten jest podobny do trójkąta o bokach długości 3, 5, 7.

6. Podstawą ostrosłupa czworokątnego $ABCDS$ jest równoległobok $ABCD$. Ponadto w ostrosłup $ABCDS$ można wpisać sferę. Wykazać, że suma pól ścian ABS i CDS jest równa sumie pól ścian BCS i ADS.

7. W przestrzeni danych jest $n \geqslant 7$ zielonych punktów, przy czym żadne cztery z nich nie leżą na jednej płaszczyźnie. Niektóre z nich połączono odcinkami, z których część pomalowano na niebiesko, a pozostałe na czerwono. Przy tym każdy zielony punkt jest końcem takiej samej liczby czerwonych co niebieskich odcinków oraz istnieje zielony punkt, który jest końcem co najmniej sześciu kolorowych odcinków.
Udowodnić, że można usunąć co najmniej jeden, ale nie wszystkie kolorowe odcinki tak, by nadal każdy zielony punkt był końcem takiej samej liczby czerwonych co niebieskich odcinków.

8. Na płaszczyźnie umieszczono 2017 punktów w taki sposób, że odległość między każdymi dwoma z nich jest większa od 1. Wykazać, że odległość między pewnymi dwoma spośród tych punktów jest większa od 35.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

6 listopada 2017 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane. Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.

LXIX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego
III seria: 7 listopada 2017 r. — 7 grudnia 2017 r.

9. Wykazać, że dla nieskończenie wielu liczb całkowitych $n > 1$ równanie

$$(x+1)^{n+1} - (x-1)^{n+1} = y^n$$

nie ma rozwiązania w liczbach całkowitych x, y.

10. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 3$. Udowodnić, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych $x_1, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność

$$\frac{1+x_1^2}{x_2+x_3} + \frac{1+x_2^2}{x_3+x_4} + \ldots + \frac{1+x_{n-2}^2}{x_{n-1}+x_n} + \frac{1+x_{n-1}^2}{x_n+x_1} + \frac{1+x_n^2}{x_1+x_2} \geqslant n.$$

11. Na płaszczyźnie dany jest trójkat $A_1A_2A_3$. Przyjmując $A_4 = A_1$ oraz $A_5 = A_2$, definiujemy punkty X_t oraz Y_t dla $t = 1, 2, 3$ następująco. Niech Γ_t będzie okręgiem dopisanym do trójkąta $A_1A_2A_3$ i stycznym do boku $A_{t+1}A_{t+2}$, zaś I_t będzie jego środkiem. Niech P_t i Q_t będą odpowiednio punktami styczności Γ_t z prostymi A_tA_{t+1} oraz A_tA_{t+2}. Wówczas X_t i Y_t są odpowiednio punktami przecięcia prostej P_tQ_t z prostymi I_tA_{t+1} oraz I_tA_{t+2}. Wykazać, że punkty $X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_3, Y_3$ leżą na jednym okręgu.

12. Zbiór A składa się z n liczb rzeczywistych. Dla podzbioru $X \subseteq A$ przez $S(X)$ oznaczamy sumę elementów zbioru X, przy czym przyjmujemy $S(\emptyset) = 0$. Niech k będzie liczbą takich różnych liczb rzeczywistych x, że $x = S(X)$ dla pewnego $X \subseteq A$. Niech ℓ będzie liczbą uporządkowanych par (X, Y) podzbiorów zbioru A spełniających równość $S(X) = S(Y)$.
Dowieść, że $k\ell \leqslant 6^n$.

Uwaga. Przy definiowaniu ℓ uwzględniamy również pary postaci (X, X) dla wszystkich $X \subseteq A$. Pary uporządkowane (X, Y) oraz (Y, X) uznajemy za różne, o ile $X \neq Y$.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

7 grudnia 2017 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane. Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.

Adresy Komitetów Okręgowych Olimpiady Matematycznej

- Dla województwa pomorskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego,
ul. Wita Stwosza 57, 80–952 Gdańsk.
- Dla województwa śląskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego,
ul. Bankowa 14, 40-007 Katowice.
- Dla województwa małopolskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego,
ul. Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków.
- Dla województwa lubelskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Zakład Rachunku Prawdopodobieństwa pok. 810, Instytut Matematyki Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej,
pl. Marii Curie-Skłodowskiej 1, 20-031 Lublin.
- Dla województwa łódzkiego i świętokrzyskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego,
ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.
- Dla województwa wielkopolskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Adama Mickiewicza,
ul. Umultowska 87, 61-614 Poznań.
- Dla województwa podkarpackiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Katedra Matematyki Politechniki Rzeszowskiej,
al. Powstańców Warszawy 8, 35-959 Rzeszów.
- Dla województwa lubuskiego i zachodniopomorskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Szczecińskiego,
ul. Wielkopolska 15, 70-451 Szczecin.
- Dla województwa kujawsko-pomorskiego i warmińsko-mazurskiego:
— Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikolaja Kopernika,
ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.
- Dla województwa mazowieckiego i podlaskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk,
ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa.
- Dla województwa dolnośląskiego i opolskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego,
pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: www.om.edu.pl