LXIX Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia pierwszego

1 września 2017 r. — 7 grudnia 2017 r.

Zadanie 1. Dane są liczby całkowite a i b oraz liczba pierwsza $p \geqslant 3$. Wykazać, że jeśli liczby $a+b$ oraz a^2+b^2 są podzielne przez p, to liczba a^2+b^2 jest podzielna przez p^2.

Autor zadania: Michał Pilipczuk

Rozwiązanie:

Skoro $p \mid (a+b)$ i $p \mid (a^2+b^2)$, to $p \mid (a+b)^2-(a^2+b^2)=2ab$. Jednakże $p \geqslant 3$, więc $p \mid a$ lub $p \mid b$, a ponieważ $p \mid (a+b)$, to $p \mid a$ i $p \mid b$. Wobec tego $p^2 \mid a^2$ oraz $p^2 \mid b^2$, skąd teza zadania. □

Zadanie 2. Dany jest trójkąt ABC, w którym $3AC = AB+BC$. Okrąg dopisany do trójkąta ABC jest styczny do boku AB w punkcie P, zaś do prostej AC w punkcie Q. Wykazać, że kąt CPQ jest prosty.

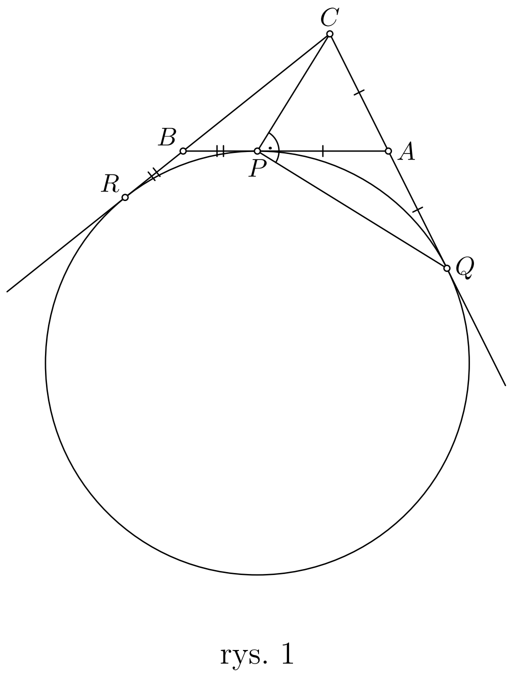
Autor zadania: Michał Kieza

Rozwiązanie:

Na podstawie równości odcinków stycznych, mamy zależności $BP = BR$, $AP = AQ$ oraz $CR = CQ$. Łącząc je wraz z warunkami zadania dostajemy, że

$$\begin{aligned} 3AC &= AB+BC = AP+PB+BC = AP+RB+BC = \\ &= CR+AP = CQ+AP = AC+AQ+AP = AC+2AP, \end{aligned}$$

stąd $AC = AP = AQ$. Oznacza to, że punkt A jest środkiem odcinka CQ i jednocześnie środkiem okręgu opisanego na trójkącie CPQ, więc $\sphericalangle CPQ = 90°$. □



rys. 1

Zadanie 3. Znaleźć wszystkie trójki x, y, z liczb rzeczywistych spełniające równania

$$\begin{cases} x^2y+2 = x+2yz \\ y^2z+2 = y+2zx \\ z^2x+2 = z+2xy \end{cases}$$

Autor zadania: Michał Figlus

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Jedynymi trójkami x, y, z spełniającymi dane równania są: $(-1,-1,-1)$, $(1,1,1)$, $(2,2,2)$.

Sposób I: Dany układ jest równoważny układowi

$$\begin{cases} x(xy-1) = 2(yz-1) \\ y(yz-1) = 2(zx-1) \\ z(zx-1) = 2(xy-1) \end{cases}$$

Wymnażając stronami wszystkie trzy równania otrzymujemy

$$xyz(xy-1)(yz-1)(zx-1) = 8(xy-1)(yz-1)(zx-1),$$

czyli

$$(xyz-8)(xy-1)(yz-1)(zx-1) = 0.$$

Rozpatrzmy teraz dwa przypadki:

Przypadek **1.** Co najmniej jedna z liczb xy, yz, zx jest równa 1.

Dany układ równań jest cykliczny, więc bez straty ogólności możemy przyjąć, że $xy = 1$. Z pierwszego równania mamy $yz = 1$, a z drugiego, że $zx = 1$. Zatem $x^2 = \dfrac{xy \cdot zx}{yz} = 1$, więc $x = 1$ lub $x = -1$. Dla $x = 1$ z równości $xy = zx = 1$ dostajemy $y = z = 1$, a dla $x = -1$ analogicznie wnioskujemy, że $y = z = -1$. Bezpośrednie sprawdzenie pokazuje, że trójki $(1,1,1), (-1,-1,-1)$ spełniają wyjściowy układ.

Przypadek **2.** Żadna z liczb xy, yz, zx nie jest równa 1.

Wtedy na mocy otrzymanej wcześniej równości zachodzi $xyz = 8$. Stąd $xy = \dfrac{8}{z}$, $yz = \dfrac{8}{x}$ oraz $zx = \dfrac{8}{y}$. Podstawiając te równości do danego w treści układu dostajemy

$$\begin{cases} \frac{8x}{z} + 2 = x + \frac{16}{x} \\ \frac{8y}{x} + 2 = y + \frac{16}{y} \\ \frac{8z}{y} + 2 = z + \frac{16}{z} \end{cases}$$

Układ ten jest cykliczny, więc bez straty ogólności możemy przyjąć, że $x \geqslant y$ i $x \geqslant z$. Wtedy x jest liczbą dodatnią, gdyż w przeciwnym wypadku byłoby $y \leqslant x \leqslant 0$ i $z \leqslant x \leqslant 0$, skąd $xyz \leqslant 0$, co przeczyłoby równości $xyz = 8$. Wobec tego $yz = \frac{8}{x} > 0$, czyli y i z są tego samego znaku i $\dfrac{z}{y} > 0$. Zatem z trzeciego równania dostajemy że

$$z + \frac{16}{z} = \frac{8z}{y} + 2 > 2 > 0,$$

więc $z > 0$ (gdyż dla $z < 0$ byłoby $z + \dfrac{16}{z} < 0$), a skoro y i z są tego samego znaku, to również $y > 0$.

Zatem $x, y, z > 0$, czyli $x^3 \geqslant xyz \geqslant 8$, co daje $x \geqslant 2$. Stąd i z drugiego równania dostajemy nierówność

$$y + \frac{16}{y} = \frac{8y}{x} + 2 \leqslant 4y + 2,$$

która jest równoważna nierówności

$$(y-2)\left(3 + \frac{8}{y}\right) \geqslant 0$$

prawdziwej dla $y \in \left[-\dfrac{8}{3}, 0\right) \cup [2, +\infty)$. Wiemy jednak, że $y > 0$, więc musi zachodzić $y \geqslant 2$. Analogicznie na podstawie trzeciego równania dostajemy $z \geqslant 2$.

Ostatecznie $x, y, z \geqslant 2$, skąd $8 = xyz \geqslant 8$, wobec czego $x = y = z = 2$, co oczywiście spełnia układ dany w zadaniu. □

Sposób II: Mnożąc pierwsze równanie przez y i dodając stronami podwojone drugie równanie otrzymujemy:

$$x^2y^2 + 2y + 2y^2z + 4 = xy + 2y^2z + 2y + 4zx,$$

lub równoważnie

$$x^2y^2 - xy + 4 = 4zx.$$

Analogicznie uzyskujemy $y^2z^2 - yz + 4 = 4xy$ oraz $z^2x^2 - zx + 4 = 4yz$. Podstawiając $a = xy, b = yz$ oraz $c = zx$ dostajemy układ równań:

$$\begin{cases} a^2 - a + 4 = 4c \\ b^2 - b + 4 = 4a \\ c^2 - c + 4 = 4b \end{cases}$$

Udowodnimy, że powyższy układ ma jedynie dwa rozwiązania $(a, b, c) = (4, 4, 4)$ oraz $(a, b, c) = (1, 1, 1)$. W tym celu rozważmy największą z liczb a, b, c. Bez straty ogólności przyjmijmy, że jest to a. Odejmując stronami dwa pierwsze równania dostajemy równość

$$(a - b)(a + b - 1) = 4(c - a)$$

Ponieważ

$$16(a + b - 1) = 4(b^2 - b + 4) + 4(c^2 - c + 4) - 16 = (2b - 1)^2 + (2c - 1)^2 + 14 > 0,$$

to liczba $a + b - 1$ jest dodatnia. Oznacza to, że zachodzi ciąg nierówności

$$0 \leqslant (a - b)(a + b - 1) = 4(c - a) \leqslant 0.$$

Ponieważ w powyższych nierównościach musi zachodzić równość, to mamy $a = b$ i $a = c$. Bezpośrednie wstawienie prowadzi do równania $a^2 - 5a + 4 = 0$, więc istotnie jedynymi rozwiązaniami są trójki $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ oraz $(a, b, c) = (4, 4, 4)$.

Wróćmy do rozwiązania zadanego układu. Ponieważ $xy = yz = zx \neq 0$, to $x = y = z$. Wyjściowy układ wraz z tą równością jest równoważny równaniu $x^3 + 2 = x + 2x^2$. Mamy

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 2)(x^2 - 1) = (x - 2)(x - 1)(x + 1),$$

więc rozwiązaniami zadanego układu są trójki $(x, y, z) = (2, 2, 2), (1, 1, 1), (-1, -1, -1)$. □

Zadanie 4. Rozważmy ciąg $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ o wyrazach ze zbioru $\{0, 1, 2\}$. *Blokiem* będziemy nazywać podciąg postaci $(a_i, a_{i+1}, \ldots, a_j)$, gdzie $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ oraz $a_i = a_{i+1} = \ldots = a_j$. Blok nazywamy *maksymalnym*, jeśli nie jest zawarty w żadnym dłuższym bloku. Przykładowo w ciągu $(1, 0, 0, 0, 2, 1, 1)$ maksymalnymi blokami są (1), $(0, 0, 0)$, (2), $(1, 1)$.

Niech K_n będzie liczbą takich ciągów długości n o wyrazach ze zbioru $\{0, 1, 2\}$, w których wszystkie maksymalne bloki mają nieparzyste długości. Ponadto niech L_n będzie liczbą wszystkich ciągów długości n o wyrazach ze zbioru $\{0, 1, 2\}$, w których liczby 0 i 2 nie występują na sąsiednich pozycjach. Udowodnić, że $L_n = K_n + \frac{1}{3}K_{n-1}$ dla wszystkich $n > 1$. □

Autor zadania: Marcin Kuczma

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że ciąg (K_n) spełnia zależność rekurencyjną:

$$K_1 = 3, K_2 = 6 \quad \text{oraz} \quad K_n = 2K_{n-1} + K_{n-2} \quad \text{dla} \quad n \geqslant 3.$$

Rozważmy $n \geqslant 3$. Ciągi długości n, które mają wszystkie maksymalne bloki nieparzystej długości dzielimy na dwa podzbiory: takie, które mają ostatni maksymalny blok długości 1 oraz takie, które mają ostatni maksymalny blok długości co najmniej 3.

Jeżeli ostatni maksymalny blok ma długość 1, to po jego usunięciu dostajemy ciąg długości $n - 1$, którego wszystkie maksymalne bloki mają nieparzyste długości. Odwrotnie, do każdego ciągu długości $n - 1$, którego wszystkie maksymalne bloki mają nieparzyste długości możemy na dwa sposoby dopisać na końcu wyraz, który utworzy nowy maksymalny blok długości 1. Oznacza to, że ciągów w pierwszym podzbiorze jest $2K_{n-1}$.

Jeżeli ostatni maksymalny blok ma długość co najmniej 3, to po usunięciu jego dwóch ostatnich wyrazów otrzymamy ciąg długości $n - 2$, którego wszystkie maksymalne bloki mają nieparzyste długości. Odwrotnie, do ciągu długości $n - 2$, którego wszystkie maksymalne bloki mają nieparzyste długości możemy tylko na jeden sposób dopisać dwa wyrazy tak, aby ostatni maksymalny blok uzyskanego ciągu miał długość co najmniej 3. Oznacza to, że ciągów w drugim podzbiorze jest K_{n-2}.

Podsumowując: otrzymaliśmy równość $K_n = 2K_{n-1} + K_{n-2}$ dla $n \geqslant 3$. Sprawdzamy, że $K_1 = 3$ oraz $K_2 = 6$ i dostajemy wskazaną zależność rekurencyjną.

Udowodnimy teraz, że ciąg (L_n) spełnia zależność rekurencyjną:

$$L_1 = 3, L_2 = 7 \quad \text{oraz} \quad L_n = 2L_{n-1} + L_{n-2} \quad \text{dla} \quad n \geqslant 3.$$

Rozważmy $n \geqslant 3$. Ciągi długości n, w których liczby 0 i 2 nie występują na sąsiednich pozycjach dzielimy na dwa podzbiory: takie, które kończą się dwoma jedynkami oraz takie, w których przynajmniej jeden z dwóch ostatnich wyrazów nie jest jedynką.

Jeżeli dwa ostatnie wyrazy w ciągu są równe 1, to po ich obcięciu dostaniemy ciąg długości $n-2$, w którym liczby 0 i 2 nie występują na sąsiednich pozycjach. Odwrotnie, do każdego ciągu długości $n-2$ w którym liczby 0 i 2 nie sąsiadują możemy dopisać dwie jedynki, w tak otrzymanym ciągu długości n liczby 0 i 2 nie występują na sąsiednich pozycjach, ponadto jest on zakończony dwoma jedynkami. Oznacza to, że ciągów w pierwszym podzbiorze jest L_{n-2}.

Jeżeli przynajmniej jeden z ostatnich dwóch wyrazów ciągu nie jest jedynką, to po obcięciu ostatniego wyrazu dostaniemy ciąg długości $n-1$, w którym liczby 0 i 2 nie występują na sąsiednich pozycjach. Odwrotnie, do każdego ciągu długości $n-1$ w którym liczby 0 i 2 nie sąsiadują możemy na dwa sposoby dopisać ostatni wyraz tak, aby 0 i 2 nie występowały na sąsiednich pozycjach a na ostatnich dwóch pozycjach nie było dwóch jedynek. Dokładniej: po 0 możemy dopisać 0 lub 1, po 1 możemy dopisać 0 lub 2 zaś po 2 możemy dopisać 1 lub 2. Oznacza to, że ciągów w drugim podzbiorze jest $2L_{n-1}$.

Podsumowując: otrzymaliśmy równość $L_n = 2L_{n-1} + L_{n-2}$ dla $n \geqslant 3$. Sprawdzamy, że $L_1 = 3$ oraz $L_2 = 7$ i dostajemy wskazaną zależność rekurencyjną.

Mając wzory rekurencyjne na ciągi (K_n) oraz (L_n), możemy udowodnić daną w zadaniu zależność przez indukcję. Dla $n = 2$ i $n = 3$ żądana równość jest spełniona gdyż

$$L_2 = 7 = 6 + \frac{1}{3} \cdot 3 = K_2 + \frac{1}{3}K_1 \quad \text{oraz} \quad L_3 = 17 = 15 + \frac{1}{3} \cdot 6 = K_3 + \frac{1}{3}K_2.$$

Natomiast dla $n \geqslant 4$ wynika ona z założenia indukcyjnego zastosowanego do $n-1$ i $n-2$:

$$\begin{aligned} L_n - K_n - \frac{1}{3}K_{n-1} &= (2L_{n-1} + L_{n-2}) - (2K_{n-1} + K_{n-2}) - \frac{1}{3}(2K_{n-2} + K_{n-3}) \\ &= 2(L_{n-1} - K_{n-1} - \frac{1}{3}K_{n-2}) + (L_{n-2} - K_{n-2} - \frac{1}{3}K_{n-3}) \\ &= 2 \cdot 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Oznacza to, że żądana zależność jest spełniona. □

Uwaga: Z uzyskanych wzorów rekurencyjnych można wyprowadzić wzory ogólne

$$K_n = \frac{3\sqrt{2}}{4}\left((1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\right) \qquad \text{oraz} \qquad L_n = \frac{1}{2}\left((1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}\right).$$

Metoda uzyskiwania wzorów ogólnych dla rekurencji liniowych jest opisana w Dodatku A do Broszury L Olimpiady Matematycznej.

Zadanie 5. Liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego. Ponadto, są one długościami boków pewnego trójkąta, w którym jeden z kątów ma miarę $120°$. Udowodnić, że trójkąt ten jest podobny do trójkąta o bokach długości 3, 5, 7.

Autor zadania: Michał Krych

Rozwiązanie:

Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $a \leqslant b \leqslant c$. Ponieważ kąt $120°$ jest rozwarty, to leży naprzeciw najdłuższego boku trójkąta. Z twierdzenia cosinusów dostajemy, że

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(120°) = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = a^2 + b^2 + ab.$$

Ponieważ liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego, to spełniona jest równość $a + c = 2b$. Łącząc otrzymane równości dostajemy, że

$$b(a+b) = c^2 - a^2 = (c+a)(c-a) = 2b(c-a),$$

stąd $a+b=2c-2a$. Mamy więc zależności

$$\begin{cases} a-2b+c &= 0 \\ 3a+b-2c &= 0. \end{cases}$$

Mnożąc pierwszą równość przez 2 i dodając do drugiej otrzymujemy związek $5a-3b=0$, a po pomnożeniu drugiej przez 2 i dodaniu do pierwszej — związek $7a-3c=0$. Wobec tego $b=\frac{5}{3}a$ i $c=\frac{7}{3}a$, zatem trójkąt jest podobny do trójkąta o bokach $3, 5, 7$.

Zadanie 6. Podstawą ostrosłupa czworokątnego $ABCDS$ jest równoległobok $ABCD$. Ponadto w ostrosłup $ABCDS$ można wpisać sferę. Wykazać, że suma pól ścian ABS i CDS jest równa sumie pól ścian BCS i ADS.

Autor zadania: Michał Kieza

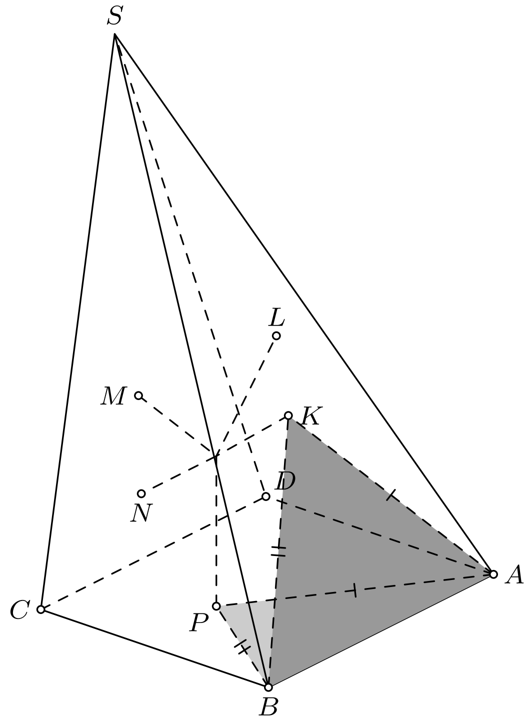
Rozwiązanie:

Niech K, L, M, N i P oznaczają punkty styczności sfery wpisanej ze ścianami ASB, ASD, DSC, BSC oraz $DCBA$, odpowiednio (rys. 1). Na podstawie równości odcinków stycznych do sfery mamy, że $AK=AP$ oraz $BP=BK$, więc trójkąty APB i AKB są przystające.

Analogicznie uzasadniamy przystawanie trójkątów: BPC i BNC, DMC i DPC, APD i ALD, CMS i CNS, SNB i BKS, ASK i ASL oraz SLD i SMD.

Oznaczmy przez $[\mathcal{F}]$ pole figury $\mathcal{F}$. Ponieważ trójkąty przystające mają równe pola, to

$$\begin{aligned}[ASB]+[DSC] &= ([AKB]+[ASK]+[BKS])+ \\ &\quad +([DMC]+[SMD]+[CMS]) = \\ &= ([APB]+[ASL]+[SNB])+ \\ &\quad +([DPC]+[SLD]+[CNS]).\end{aligned}$$



rys. 1

Podobnie dostajemy związek

$$[BSC]+[ASD] = ([BPC]+[SNB]+[CNS])+([APD]+[ASL]+[SLD]).$$

Odejmując powyższe równości stronami otrzymujemy, że

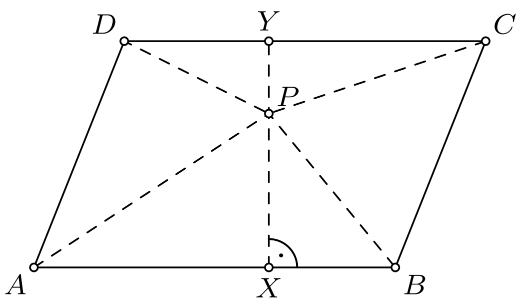
$$[ASB]+[DSC]-([BSC]+[ASD]) = [APB]+[DPC]-([BPC]+[APD]),$$

więc wystarczy pokazać zależność $[APB]+[DPC]=[BPC]+[APD]$ lub równoważnie

$$[APB]+[DPC]=\frac{1}{2}[ABCD].$$

Rozpatrzmy równoległobok $ABCD$ (rys. 2) i niech prosta przechodząca przez punkt P i prostopadła do AB przecina odcinki AB i CD w punktach odpowiednio X i Y. Wówczas

$$\begin{aligned}[APB]+[CPD] &= \frac{1}{2}\cdot PX\cdot AB+\frac{1}{2}\cdot PY\cdot CD = \\ &= \frac{1}{2}\cdot AB\cdot(PX+PY) = \\ &= \frac{1}{2}\cdot AB\cdot XY = \frac{1}{2}[ABCD],\end{aligned}$$



rys. 2

skąd teza. $\square$

Zadanie 7. W przestrzeni danych jest $n \geqslant 7$ zielonych punktów, przy czym żadne cztery z nich nie leżą na jednej płaszczyźnie. Niektóre z nich połączono odcinkami, z których część pomalowano na niebiesko, a pozostałe na czerwono. Przy tym każdy zielony punkt jest końcem takiej samej liczby czerwonych co niebieskich odcinków oraz istnieje zielony punkt, który jest końcem co najmniej sześciu kolorowych odcinków. Udowodnić, że można usunąć co najmniej jeden, ale nie wszystkie kolorowe odcinki tak, by nadal każdy zielony punkt był końcem takiej samej liczby czerwonych co niebieskich odcinków.

Autor zadania: Kamil Rychlewicz

Rozwiązanie:

Wybierzmy dowolny zielony punkt, który jest końcem co najmniej sześciu kolorowych odcinków. Niech to będzie punkt P. Rozważmy zbiór łamanych złożonych z kolorowych odcinków o następujących własnościach:

- łamana zaczyna się w punkcie P,
- łamana nie przechodzi ponownie przez punkt P.
- odcinki łamanej są na przemian czerwone i niebieskie, zaczynając od czerwonego,
- każdy kolorowy odcinek jest odcinkiem łamanej co najwyżej raz.

Ze zbioru tych łamanych wybierzmy taką, która składa się z maksymalnej możliwej liczby odcinków. Oznaczmy koniec tej łamanej przez Q. Punkt Q należy do nieparzystej liczby odcinków łamanej, a ponieważ kolory odcinków łamanej występują na przemian i punkt Q jest końcem tej samej liczby czerwonych co niebieskich odcinków, to z punktu Q wychodzi odcinek koloru różnego od koloru ostatniego odcinka łamanej. Skoro nasza łamana ma maksymalną możliwą długość, to drugim końcem tego odcinka musi być punkt P, gdyż w przeciwnym razie moglibyśmy naszą łamaną wydłużyć.

Uzyskaliśmy łamaną której odcinki mają naprzemienne kolory, która zaczyna i kończy się w punkcie P oraz o tej własności, że punkt P nie leży w środku łamanej. Jeżeli pierwszy i ostatni odcinek tej łamanej mają różne kolory, to zbiór odcinków naszej łamanej spełnia warunki zadania. W przeciwnym razie nasza łamana zaczyna i kończy się czerwonym odcinkiem.

W zbiorze pozostałych odcinków analogicznie znajdujemy łamaną zaczynającą i kończącą się w punkcie P, która zaczyna się niebieskim odcinkiem i której odcinki mają naprzemienne kolory. Jeżeli ta łamana kończy się czerwonym odcinkiem, to zbiór jej odcinków spełnia warunki zadania. W innym wypadku zbiór odcinków obu łamanych spełnia warunki zadania. Zauważmy, że nie usuwamy wszystkich odcinków, gdyż usuwamy co najwyżej cztery odcinki, których końcem jest punkt P. ☐

Zadanie 8. Na płaszczyźnie umieszczono 2017 punktów w taki sposób, że odległość między każdymi dwoma z nich jest większa od 1. Wykazać, że odległość między pewnymi dwoma spośród tych punktów jest większa od 35.

Autor zadania: Michał Pilipczuk

Rozwiązanie:

Przypuśćmy dla dowodu nie wprost, że każde dwa spośród danych punktów leżą w odległości co najwyżej 35.

Ponieważ odległości pomiędzy danymi punktami są nie większe niż 35, to wszystkie punkty znajdują się w kwadracie 35×35, którego lewy bok wyznacza punkt znajdujący się najbardziej na lewo, zaś górny bok, punkt, który znajduje się najwyżej. Rozważmy koła o środkach w danych punktach i promieniu $1/2$. Ponieważ ich środki znajdują się w kwadracie o boku 35, to wnętrza kół znajdują się wewnątrz kwadratu o boku 36. Oszacujmy sumę pól danych kół:

$$2017 \cdot \pi \cdot (1/2)^2 > 2016 \cdot 1/4 \cdot \pi = 504\pi > 504 \cdot 3 = 1512 = 42 \cdot 36 > 36^2.$$

Oznacza to, że pewne dwa z tych kół przecinają się. Środki przecinających się kół znajdują się w odległości mniejszej niż 1, co przeczy założeniu zadania. Otrzymana sprzeczność dowodzi tezy zadania. ☐

Uwaga. Zadanie można rozwiązać w analogiczny sposób wykorzystując twierdzenie Junga:

Twierdzenie. *Każdy skończony zbiór punktów, wśród których dowolne dwa punkty znajdują się w odległości co najwyżej d, zawiera się w pewnym kole o promieniu $\frac{d}{\sqrt{3}}$.*

Dowód. Aby udowodnić to twierdzenie wystarczy rozważyć koła o środkach w danych punktach i promieniu $\frac{d}{\sqrt{3}}$. Wykażemy, że dowolne trzy spośród tych kół przecinają się. Wybierzmy pewne trzy punkty, jeżeli są one współliniowe, to teza jest oczywista. W przeciwnym razie oznaczmy przez α najmniejszy kąt trójkąta wyznaczonego przez te trzy punkty. Z twierdzenia sinusów wynika, że promień okręgu opisanego na tym trójkącie nie może być większy niż $\frac{d}{2\sin\alpha} \leqslant \frac{d}{2\sin(60^\circ)} = \frac{d}{\sqrt{3}}$. Oznacza to, że środek okręgu opisanego na tym trójkącie należy do każdego z trzech wybranych kół. Ponieważ każde trzy spośród tych kół mają punkt wspólny, to wszystkie te koła mają punkt wspólny, co jest konsekwencją następującego twierdzenia Helly'ego:

Twierdzenie. *Jeżeli $C_1, C_2, \ldots, C_n$ są wypukłymi podzbiorami płaszczyzny i każde trzy mają punkt wspólny, to zbiór $C_1 \cap C_2 \cap \ldots \cap C_n$ jest niepusty.*

Niech P będzie dowolnym punktem wspólnym wybranych kół. Pozostaje zauważyć, że koło o środku w punkcie P i promieniu $\frac{d}{\sqrt{3}}$ zawiera dane punkty. □

Więcej o twierdzeniu Junga i Helly'ego można przeczytać np. w książce I. M. Jagłoma i W. G. Bołtiańskiego, Figury wypukłe, PWN, Warszawa 1950.

Przejdźmy do rozwiązania zadania. Analogicznie jak w pierwszym sposobie zakładamy, że odległość między dowolnymi spośród danych punktów jest nie większa niż 35. Z twierdzenia Junga wynika, że punkty te leżą w kole o promieniu $\frac{35\sqrt{3}}{3}$. Rozważamy koła o środkach w danych punktach i promieniu $1/2$. Wnętrza tych kół leżą wewnątrz koła o promieniu $\frac{1}{2}+\frac{35\sqrt{3}}{3}$. Podobnie jak w pierwszym sposobie pozostaje zauważyć, że któreś dwa z tych kół przecinają się, gdyż ich suma pól jest większa od pola koła wewnątrz którego się znajdują:

$$2017 \cdot \pi \cdot (1/2)^2 > \pi \left(\frac{1}{2} + \frac{35\sqrt{3}}{3}\right)^2 \iff \sqrt{2017} > 1 + \frac{70\sqrt{3}}{3}.$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, gdyż

$$\sqrt{2017} > \sqrt{1936} = 44 = 1 + \frac{129}{3} > 1 + \frac{7 \cdot 18}{3} > 1 + \frac{7 \cdot \sqrt{300}}{3} = 1 + \frac{70\sqrt{3}}{3}.$$

Uwaga. *Zauważmy na koniec, że prowadząc dokładne rachunki w obydwu sposobach, można udowodnić, że pewne dwa spośród danych punktów znajdują się w odległości co najmniej* 38.

Zadanie 9. Wykazać, że dla nieskończenie wielu liczb całkowitych $n > 1$ równanie

$$(x+1)^{n+1} - (x-1)^{n+1} = y^n$$

nie ma rozwiązania w liczbach całkowitych x, y.

Autor zadania: Witold Bednarek

Rozwiązanie:

Wykażemy, że dla $n = p-1$, gdzie $p > 2$ jest dowolną liczbą pierwszą, podane równanie nie ma rozwiązania w liczbach całkowitych.

Załóżmy, że istnieją takie liczby całkowite x, y, że zachodzi równość

$$(x+1)^p - (x-1)^p = y^{p-1}.$$

Z małego twierdzenia Fermata wynika, że

$$p \mid (x+1)^p - (x+1) \text{ oraz } p \mid (x-1)^p - (x-1).$$

Wobec tego

$$p \mid (x+1)^p - (x+1) - ((x-1)^p - (x-1)) = (x+1)^p - (x-1)^p - 2 = y^{p-1} - 2.$$

Stąd otrzymujemy podzielność

$$p \mid y(y^{p-1} - 2) = y^p - y - y.$$

Ponownie korzystając z małego twierdzenia Fermata dostajemy, że $p \mid y^p - y$, co wraz z poprzednią podzielnością daje $p \mid y$ — sprzeczność z tym, że $p \mid y^{p-1} - 2$. $\square$

Zadanie 10. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 3$. Udowodnić, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych $x_1, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność

$$\frac{1+x_1^2}{x_2+x_3} + \frac{1+x_2^2}{x_3+x_4} + \ldots + \frac{1+x_{n-2}^2}{x_{n-1}+x_n} + \frac{1+x_{n-1}^2}{x_n+x_1} + \frac{1+x_n^2}{x_1+x_2} \geqslant n.$$

Autor zadania: Michał Kieza

Rozwiązanie:

Korzystając z nierówności między średnimi dostajemy ciąg nierówności

$$\frac{1+x_1^2}{x_2+x_3} + \frac{x_2+x_3}{2} \geqslant 2\sqrt{\frac{1+x_1^2}{x_2+x_3} \cdot \frac{x_2+x_3}{2}} = 2\sqrt{\frac{1+x_1^2}{2}} \geqslant 2 \cdot \frac{1+x_1}{2} = 1 + x_1.$$

Analogicznie dla $k = 1, 2, \ldots, n$ otrzymujemy nierówności:

$$\frac{1+x_k^2}{x_{k+1}+x_{k+2}} + \frac{x_{k+1}+x_{k+2}}{2} \geqslant 1 + x_k,$$

gdzie przyjmujemy $x_{n+1} = x_1$ oraz $x_{n+2} = x_2$. Sumując powyższe nierówności i odejmując od obu stron sumę $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ dostajemy tezę. $\square$

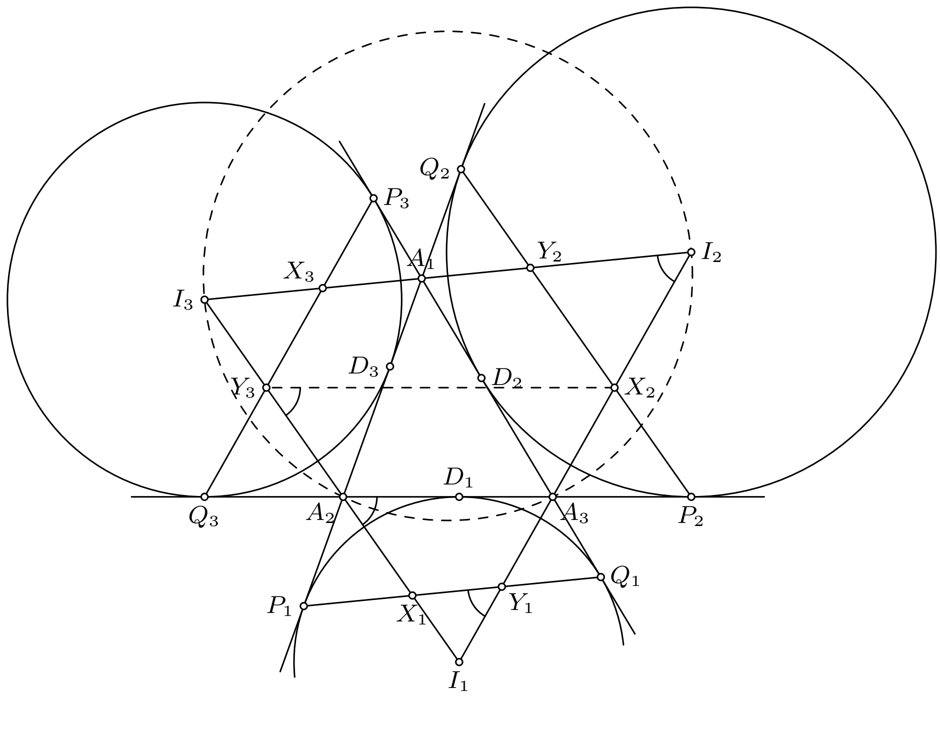
Zadanie 11. Na płaszczyźnie dany jest trójkąt $A_1A_2A_3$. Przyjmując $A_4 = A_1$ oraz $A_5 = A_2$, definiujemy punkty X_t oraz Y_t dla $t = 1, 2, 3$ następująco. Niech Γ_t będzie okręgiem dopisanym do trójkąta $A_1A_2A_3$ i stycznym do boku $A_{t+1}A_{t+2}$, zaś I_t będzie jego środkiem. Niech P_t i Q_t będą odpowiednio punktami styczności Γ_t z prostymi A_tA_{t+1} oraz A_tA_{t+2}. Wówczas X_t i Y_t są odpowiednio punktami przecięcia prostej P_tQ_t z prostymi I_tA_{t+1} oraz I_tA_{t+2}. Wykazać, że punkty $X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_3, Y_3$ leżą na jednym okręgu.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Niech D_1, D_2, D_3 będą punktami styczności okręgów dopsianych do boków BC, CA i AB, odpowiednio (rys. 3). Wykorzystując równość odcinków stycznych mamy

$$\begin{aligned} Q_3A_3 &= \frac{1}{2}(Q_3A_3 + P_3A_3) = \frac{1}{2}(Q_3A_2 + A_2A_3 + A_3A_1 + A_1P_3) = \\ &= \frac{1}{2}(D_3A_2 + A_2A_3 + A_3A_1 + A_1D_3) = p, \end{aligned}$$



rys. 3

gdzie p jest połową obwodu trójkąta $A_1A_2A_3$. Analogicznie dostajemy, że $A_2P_2 = p$, stąd

$$Q_3A_2 = p - A_2A_3 = A_2P_2 - A_2A_3 = A_3P_2. \tag{1}$$

Prosta Q_3P_3 jest prostopadła do dwusiecznej kąta $A_2A_3A_1$, więc jest równoległa do prostej A_3X_2, która jest dwusieczną kąta zewnętrznego $A_2A_3A_1$. Podobnie $A_2Y_3 \parallel X_2P_2$. Wobec tego z równości (1) dostajemy przystawanie trójkątów $Q_3A_2Y_3$ oraz $A_3P_2X_2$. W szczególności $X_2Y_3 \parallel A_2A_3$.

Zauważmy teraz, że $\sphericalangle I_3A_3I_2 = 90°$, gdyż jest to kąt między dwusiecznymi kątów przyległych. Podobnie $\sphericalangle I_3A_2I_2 = 90°$, więc na czworokącie $I_2I_3A_2A_3$ można opisać okrąg. Wobec tego $\sphericalangle A_3I_2I_3 = \sphericalangle A_3A_2X_1$. Z równoległości $I_2I_3 \parallel X_1Y_1$ oraz $X_2Y_3 \parallel A_2A_3$ wynika więc, że

$$\sphericalangle I_1Y_1X_1 = \sphericalangle A_3I_2I_3 = \sphericalangle A_3A_2X_1 = \sphericalangle X_2Y_3A_2. \tag{2}$$

Równość (2) pokazuje, że na czworokącie $X_1Y_1X_2Y_3$ można opisać okrąg. Analogicznie uzasadniamy, że na czworokątach $X_2Y_2X_3Y_1$ oraz $X_3Y_3X_1Y_2$ można opisać okręgi.

Gdyby czworokąty $X_1Y_1X_2Y_3$, $X_2Y_2X_3Y_1$ oraz $X_3Y_3X_1Y_2$ były wpisane w różne okręgi, to ich osie potęgowe I_1I_2, I_2I_3 i I_3I_1 przecinałyby się w jednym punkcie, co jest niemożliwe. Wobec tego punkty $X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_3, Y_3$ leżą na jednym okręgu. □

Uwaga. W końcówce rozwiązania nie jest konieczne wykorzystanie osi potęgowych. Istotnie: z tego, że na czworokącie $A_2A_3I_1I_3$ można opisać okrąg oraz równoległości $Y_2X_2 \parallel I_3A_2$, $I_2A_3 \parallel X_3Q_3$ oraz $Q_3P_2 \parallel Y_3X_2$ mamy

$$\sphericalangle X_2Y_2I_2 = \sphericalangle I_2I_3A_2 = \sphericalangle I_2A_3P_2 = \sphericalangle X_3Q_3P_2 = \sphericalangle X_3Y_3X_2.$$

Wobec tego na czworokącie $X_2Y_2X_3Y_3$ można opisać okrąg. Podobnie pokazujemy, że na czworokątach $X_1Y_1X_3Y_3$ oraz $Y_1X_2Y_2X_1$ można opisać okręgi.

Zadanie 12. Zbiór A składa się z n liczb rzeczywistych. Dla podzbioru $X \subseteq A$ przez $S(X)$ oznaczamy sumę elementów zbioru X, przy czym przyjmujemy $S(\emptyset) = 0$. Niech k będzie liczbą takich różnych liczb rzeczywistych x, że $x = S(X)$ dla pewnego $X \subseteq A$. Niech ℓ będzie liczbą uporządkowanych par (X, Y) podzbiorów zbioru A spełniających równość $S(X) = S(Y)$.
Dowieść, że $k\ell \leqslant 6^n$.

Uwaga. Przy definiowaniu ℓ uwzględniamy również pary postaci (X, X) dla wszystkich $X \subseteq A$. Pary uporządkowane (X, Y) oraz (Y, X) uznajemy za różne o ile $X \neq Y$.

Zadanie zaproponował: Michał Pilipczuk

Rozwiązanie:

Dla dowolnego zbioru X, niech $\mathcal{P}(X)$ oznacza zbiór wszystkich podzbiorów X, natomiast $|X|$ to liczba elementów X.

Oznaczmy przez $\mathcal{S}$ zbiór tych liczb rzeczywistych x, że $x = S(X)$ dla pewnego $X \subseteq A$. Dla dowolnego elementu $s \in \mathcal{S}$ niech P_s oznacza zbiór tych $X \subseteq A$, że $S(X) = s$.

Oczywiście

$$k = |\mathcal{S}| \quad \text{oraz} \quad \sum_{s \in \mathcal{S}} |P_s| = |\mathcal{P}(A)| = 2^n.$$

Ponieważ liczba takich uporządkowanych par (X, Y) podzbiorów zbioru A, że $S(X) = S(Y) = s$ wynosi $|P_s|^2$, to

$$\ell = \sum_{s \in \mathcal{S}} |P_s|^2.$$

Niech $s_0 \in \mathcal{S}$ będzie taką liczbą rzeczywistą, że liczba elementów w zbiorze P_{s_0} jest największa. Oznaczmy przez $M = |P_{s_0}|$ tę liczbę elementów. Ponieważ spełniona jest nierówność

$$k\ell = |\mathcal{S}| \cdot \sum_{s \in \mathcal{S}} |P_s|^2 \leqslant M \cdot |\mathcal{S}| \cdot \sum_{s \in \mathcal{S}} |P_s| = M \cdot |\mathcal{S}| \cdot 2^n,$$

to wystarczy wykazać, że $M \cdot |\mathcal{S}| \leqslant 3^n$.

Niech $Q \subseteq P(A)$ będzie zbiorem zawierającym po jednym elemencie z każdego zbioru P_s, dla $s \in \mathcal{S}$. Oczywiście $|Q| = |\mathcal{S}|$.

Oznaczmy elementy zbioru A przez $a_1, a_2, \ldots, a_n$ w dowolnej kolejności. Dla dowolnego podzbioru $Z \subseteq A$ niech
$$v(Z) = (v_1(Z), v_2(Z), \ldots, v_n(Z)),$$
gdzie
$$v_i(Z) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } a_i \in Z, \\ 0 & \text{jeśli } a_i \notin Z. \end{cases}$$
Łatwo zauważyć, że dla dowolnych $Z, Z' \subseteq A$, jeśli $v(Z) = v(Z')$, to $Z = Z'$.

Dla zbiorów $X \in P_{s_0}$ oraz $Y \in Q$ wprowadźmy n-tkę
$$v(X,Y) := v(X) + v(Y) = (v_1(X,Y), v_2(X,Y), \ldots, v_n(X,Y)),$$
gdzie $v_i(X,Y) = v_i(X) + v_i(Y)$. Wówczas
$$S(X) + S(Y) = a_1 \cdot v_1(X,Y) + a_2 \cdot v_2(X,Y) + \ldots + a_n \cdot v_n(X,Y). \tag{3}$$

Pokażemy, że dla wszystkich $(X,Y) \in P_{s_0} \times Q$, n-tki $v(X,Y)$ są parami różne. A ponieważ $v_i \in \{0,1,2\}$, to dostaniemy, że $M \cdot |\mathcal{S}| = |P_{s_0}| \cdot |Q| \leqslant 3^n$, czyli zakończymy dowód.

Załóżmy, że dla pewnych $(X,Y), (X',Y') \in P_{s_0} \times Q$ zachodzi równość $v(X,Y) = v(X',Y')$. Na mocy (3) oznacza to w szczególności, że
$$S(X) + S(Y) = S(X') + S(Y').$$
Skoro każdy ze zbiorów w P_{s_0} ma sumę równą s_0, to $S(X) = S(X') = s_0$, więc również $S(Y) = S(Y')$. Jednakże zbiory w Q mają parami różne sumy, więc wynika stąd, że $Y = Y'$.

Zauważmy teraz, że z równości $v(X,Y) = v(X',Y')$ oraz $Y = Y'$ wynika $X = X'$. Istotnie, mamy wtedy
$$v(X) = v(X,Y) - v(Y) = v(X',Y') - v(Y') = v(X'),$$
więc $X = X'$. Wynika stąd, że $v(X,Y) = v(X',Y')$ pociąga za sobą $(X,Y) = (X',Y')$, co kończy dowód.

$\square$

(db,mg)