LXIX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia drugiego

9 lutego 2018 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Wyznaczyć wszystkie funkcje f określone na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości rzeczywiste, które spełniają oba następujące warunki:

- $f(x) + f(y) \geqslant xy$ dla wszystkich liczb rzeczywistych x, y; oraz
- dla każdej liczby rzeczywistej x istnieje taka liczba rzeczywista y, że $f(x) + f(y) = xy$.

2. Dana jest dodatnia liczba całkowita n, która z dzielenia przez 8 daje resztę 4. Liczby

$$1 = k_1 < k_2 < \ldots < k_m = n$$

są wszystkimi dodatnimi dzielnikami liczby n. Udowodnić, że jeśli liczba $i \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$ nie jest podzielna przez 3, to $k_{i+1} \leqslant 2k_i$.

3. Symetralna boku BC przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punktach P i Q, przy czym punkty A i P leżą po tej samej stronie prostej BC. Punkt R jest rzutem prostokątnym punktu P na prostą AC. Punkt S jest środkiem odcinka AQ. Wykazać, że punkty A, B, R i S leżą na jednym okręgu.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.

LXIX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia drugiego

10 lutego 2018 r. (drugi dzień zawodów)

4. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD, przy czym okrąg o średnicy BC jest styczny do prostej AD. Udowodnić, że okrąg o średnicy AD jest styczny do prostej BC.

5. Dane są takie pięcioelementowe podzbiory $A_1, A_2, \ldots, A_k$ zbioru $\{1, 2, \ldots, 23\}$, że dla wszystkich $1 \leqslant i < j \leqslant k$ zbiór $A_i \cap A_j$ ma co najwyżej trzy elementy. Wykazać, że $k \leqslant 2018$.

6. Dana jest dodatnia liczba całkowita k oraz ciąg $a_1, a_2, a_3, \ldots$ o wyrazach ze zbioru $\{0, 1, 2, \ldots, k\}$. Niech

$$b_n = \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_n^n}$$

dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych n. Udowodnić, że jeśli w ciągu $b_1, b_2, b_3, \ldots$ występuje nieskończenie wiele całkowitych wyrazów, to wszystkie wyrazy tego ciągu są całkowite.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.