LXIX Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia drugiego
9 lutego 2017 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Wyznaczyć wszystkie funkcje f określone na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości rzeczywiste, które spełniają oba następujące warunki:

- $f(x)+f(y) \geqslant xy$ dla wszystkich liczb rzeczywistych x, y; oraz
- dla każdej liczby rzeczywistej x istnieje taka liczba rzeczywista y, że $f(x)+f(y)=xy$.

Autorzy zadania: Marta i Michał Strzeleccy

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Warunki zadania spełnia jedynie funkcja zadana wzorem $f(x)=\dfrac{x^2}{2}$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x.

Niech f będzie funkcją spełniającą warunki zadania. Wstawiając do pierwszego warunku $x=y$ dostajemy nierówność $f(x)+f(x) \geqslant x^2$, lub równoważnie $f(x) \overset{(\star)}{\geqslant} \dfrac{x^2}{2}$.

Wybierzmy dowolną liczbę rzeczywistą x. Z drugiego warunku wynika, że istnieje taka liczba rzeczywista y, że $f(x)+f(y)=xy$. Stąd i z nierówności $(\star)$ dostajemy, że

$$0=f(x)+f(y)-xy \geqslant \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}-xy=\frac{1}{2}(x-y)^2 \geqslant 0.$$

Oznacza to, że w powyższych nierównościach musi zachodzić równość, w szczególności $f(x)=\dfrac{x^2}{2}$.

Niech teraz $f(x)=\dfrac{x^2}{2}$. Wówczas

$$f(x)+f(y)-xy=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}-xy=\frac{1}{2}(x-y)^2 \geqslant 0,$$

więc pierwszy warunek jest spełniony. Równość w powyższej nierówności zachodzi dla $y=x$, więc drugi warunek jest również spełniony. $\square$

2. Dana jest dodatnia liczba całkowita n, która z dzielenia przez 8 daje resztę 4. Liczby

$$1=k_1<k_2<\ldots<k_m=n$$

są wszystkimi dodatnimi dzielnikami liczby n. Udowodnić, że jeśli liczba $i \in \{1,2,\ldots,m-1\}$ nie jest podzielna przez 3, to $k_{i+1} \leqslant 2k_i$.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Niech $i \in \{1,2,\ldots,m-1\}$ będzie taką liczbą, że spełniona jest nierówność $k_{i+1}>2k_i$. Udowodnimy, że liczba i jest podzielna przez 3. W tym celu wykażemy, że zbiór $\{k_1,k_2,\ldots,k_i\}$ jest sumą rozłącznych trójek postaci $(d,2d,4d)$, gdzie d jest dowolnym nieparzystym dzielnikiem n nie większym od k_i.

Niech $d \mid n$, $2 \nmid d$ oraz $d \leqslant k_i$. Ponieważ liczby 2 i d są względnie pierwsze i obie są dzielnikami n, więc $2d \mid n$ i $2d \leqslant 2k_i$. Ponieważ k_i oraz k_{i+1} są kolejnymi dzielnikami n i $2d<k_{i+1}$, więc $2d \leqslant k_i$.

W taki sam sposób korzystając z tego, że $4 \mid n$ dowodzimy, że $2 \cdot 2d = 4d \mid n$ i $4d = 2 \cdot 2d \leqslant k_i$. Oznacza to, że trójka $(d, 2d, 4d)$ jest podzbiorem zbioru $\{k_1, k_2, \ldots, k_i\}$.

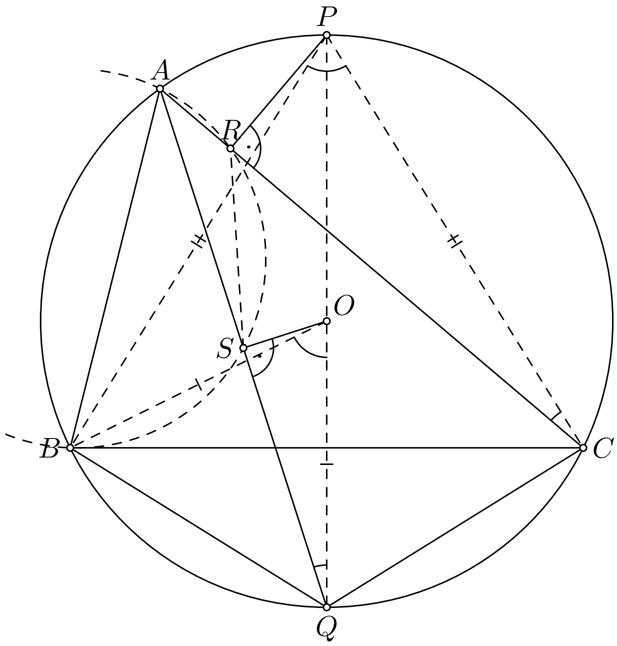
Niech $a \leqslant k_i$ będzie dzielnikiem n. Ponieważ $8 \nmid n$, to $8 \nmid a$. Oznacza to, że $a = d$, $a = 2d$ lub $a = 4d$, dla pewnego nieparzystego dzielnika d liczby n. Ponieważ $d \leqslant a \leqslant k_i$, to a należy do pewnej trójki postaci $(d, 2d, 4d)$.

Oczywiście jeżeli $d_1 \neq d_2$, to trójki $(d_1, 2d_1, 4d_1)$ i $(d_2, 2d_2, 4d_2)$ są rozłączne. Zatem istotnie rozbiliśmy zbiór $\{k_1, k_2, \ldots, k_i\}$ na rozłączne podzbiory trójelementowe, więc $3 \mid i$, stąd teza. □

3. Symetralna boku BC przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punktach P i Q, przy czym punkty A i P leżą po tej samej stronie prostej BC. Punkt R jest rzutem prostokątnym punktu P na prostą AC. Punkt S jest środkiem odcinka AQ. Wykazać, że punkty A, B, R i S leżą na jednym okręgu.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:



rys. 1

Bez straty ogólności przyjmijmy, że $AB < AC$. Jeżeli $AB = AC$, to $A = P = R$ i $S = O$. Ponieważ w takim przypadku $\sphericalangle ACB < 90^\circ$, to punkty A, B, O nie są współliniowe, więc leżą na jednym okręgu i teza zadania jest spełniona. Jeżeli $AB > AC$, to rozwiązanie przebiega analogicznie.

Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Oczywiście punkt O leży na odcinku PQ oraz $OS \perp AQ$. Ponieważ $\sphericalangle PCR = \sphericalangle OQS$, to trójkąty prostokątne PRC i OSQ są podobne.

Ponadto $PB = PC$, $OB = OQ$ oraz

$$\sphericalangle BOQ = 2\sphericalangle BCQ = 2\sphericalangle QPC = \sphericalangle BPC,$$

więc trójkąty OBQ i PBC są podobne. Na podstawie uzyskanych podobieństw wnioskujemy, że czworokąty $OSBQ$ i $PRBC$ są podobne. W szczególności $\sphericalangle BSQ = \sphericalangle BRC$, więc

$$\sphericalangle ARB = 180^\circ - \sphericalangle BRC = 180^\circ - \sphericalangle BSQ = \sphericalangle ASB,$$

zatem na czworokącie $ABSR$ można opisać okrąg. □

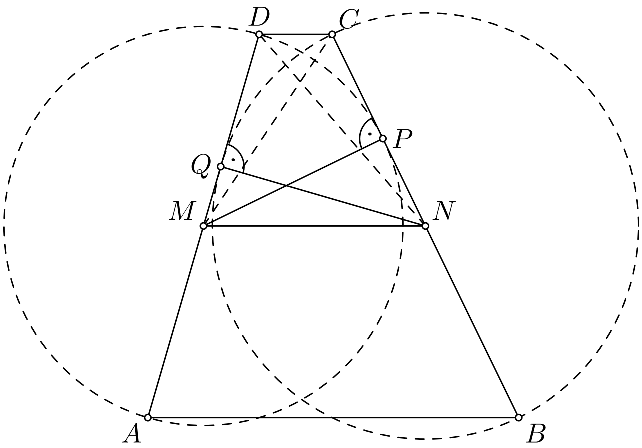
LXIX Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia drugiego
10 lutego 2017 r. (drugi dzień zawodów)

4. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD, przy czym okrąg o średnicy BC jest styczny do prostej AD. Udowodnić, że okrąg o średnicy AD jest styczny do prostej BC.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:



rys. 2

Niech punkty M i N będą odpowiednio środkami ramion AD i BC. Załóżmy, że okrąg o średnicy BC jest styczny do prostej AD w punkcie Q. Wówczas $NQ = NC$, gdyż są to promienie okręgu o średnicy BC. Oznaczmy przez P rzut prostokątny punktu M na prostą BC.

Ponieważ $MN \parallel CD$, to $[MNC] = [MND]$, gdzie $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$. Jednakże ze wzoru na pole trójkąta oraz założenia zadania mamy

$$[MND] = \frac{1}{2} \cdot MD \cdot QN = \frac{1}{2} \cdot MD \cdot CN. \tag{1}$$

Podobnie

$$[MNC] = \frac{1}{2} \cdot CN \cdot MP. \tag{2}$$

Porównując uzyskane zależności stwierdzamy, że $MD = MP$, czyli okrąg o średnicy AD jest styczny do BC w punkcie P. □

5. Dane są takie pięcioelementowe podzbiory $A_1, A_2, \ldots, A_k$ zbioru $\{1, 2, \ldots, 23\}$, że dla wszystkich $1 \leqslant i < j \leqslant k$ zbiór $A_i \cap A_j$ ma co najwyżej trzy elementy. Wykazać, że $k \leqslant 2018$.

Autor zadania: Wojciech Nadara

Rozwiązanie:

Oszacujmy na dwa sposoby liczbę takich par (B, i), że $1 \leqslant i \leqslant k$ oraz B jest czteroelementowym podzbiorem zbioru A_i.

Z jednej strony, dla dowolnego $1 \leqslant i \leqslant k$ istnieje dokładnie 5 czteroelementowych podzbiorów zbioru A_i, więc liczba naszych par wynosi $5k$.

Z drugiej strony dowolny czteroelementowy podzbiór zbioru $\{1, 2, \ldots, 23\}$ może być podzbiorem co najwyżej jednego spośród zbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Oznacza to, że liczba naszych par jest nie większa od liczby czteroelementowych podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, 23\}$. Stąd spełniona jest nierówność

$$5k \leqslant \binom{23}{4} = \frac{23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20}{24} = 23 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 5 = 1771 \cdot 5,$$

więc $k \leqslant 1771 \leqslant 2018$. □

6. Dana jest dodatnia liczba całkowita k oraz ciąg $a_1, a_2, a_3, \ldots$ o wyrazach ze zbioru $\{0, 1, 2, \ldots, k\}$. Niech

$$b_n = \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_n^n}$$

dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych n. Udowodnić, że jeśli w ciągu $b_1, b_2, b_3, \ldots$ występuje nieskończenie wiele całkowitych wyrazów, to wszystkie wyrazy tego ciągu są całkowite.

Autor zadania: Rami Ayoush

Rozwiązanie:

Jeżeli wszystkie wyrazy ciągu $a_1, a_2, a_3, \ldots$ są zerami, to również wszystkie wyrazy ciągu $b_1, b_2, b_3, \ldots$ są zerami i teza zadania jest spełniona. Przypuśćmy, że co najmniej jeden wyraz ciągu $a_1, a_2, a_3, \ldots$ jest dodatni. Bez straty ogólności, zmniejszając ewentualnie k, możemy przyjąć, że liczba k jest największym wyrazem ciągu $a_1, a_2, a_3 \ldots$.

Niech s będzie najmniejszą taką liczbą całkowitą, że $a_s = k$. Udowodnimy, że dla dowolnego $m \neq s$ zachodzi równość $a_m = 0$. Wybierzmy taką liczbę $n \geqslant \max\{s, m, 2k^2\}$, że b_n jest liczbą całkowitą. Ponieważ $n \geqslant 2k^2$, to zachodzą nierówności

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^n = 1 + \frac{n}{k} + \frac{n(n-1)}{2k^2} + \ldots + \frac{1}{k^n} > 1 + (n-1) \cdot \frac{n}{2k^2} \geqslant n,$$

więc $1 + \frac{1}{k} > \sqrt[n]{n}$. Wobec tego spełniona jest nierówność

$$b_n = \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_n^n} \leqslant \sqrt[n]{n \cdot k^n} < \left(1 + \frac{1}{k}\right) \cdot k = k + 1.$$

Z drugiej strony jeżeli $a_m \geqslant 1$, to

$$b_n = \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_n^n} \geqslant \sqrt[n]{1 + a_s^n} > \sqrt[n]{a_s^n} = k.$$

Otrzymaliśmy, że b_n jest liczbą całkowitą i $k < b_n < k + 1$. Uzyskaliśmy sprzeczność, więc istotnie $a_m = 0$.

Wobec powyższych rozważań dla dowolnej liczby całkowitej n spełnione są równości

$$a_n = \begin{cases} k & \text{dla } n = s \\ 0 & \text{dla } n \neq s \end{cases} \qquad \text{oraz} \qquad b_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n < s \\ k & \text{dla } n \geqslant s \end{cases}$$

W szczególności wszystkie wyrazy ciągu $b_1, b_2, b_3, \ldots$ są całkowite. □

(db,mg)