LXIX Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia trzeciego
18 kwietnia 2018 r. (pierwszy dzień zawodów)

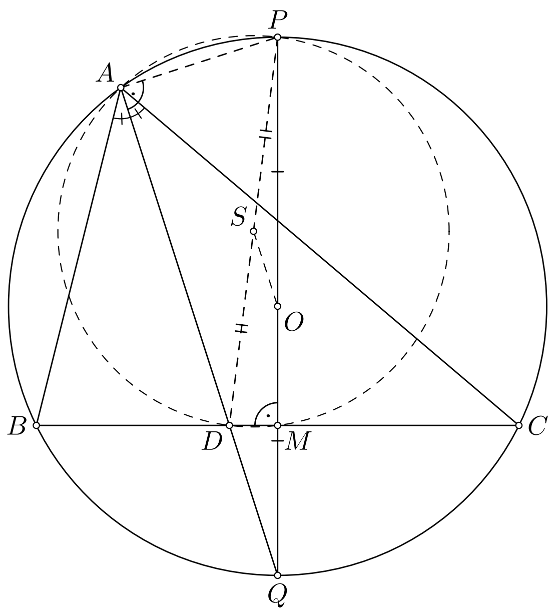
1. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AB < AC$. Dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie D. Punkt M jest środkiem boku BC. Udowodnić, że prosta przechodząca przez środki okręgów opisanych na trójkątach ABC i ADM jest równoległa do prostej AD.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Oznaczmy odpowiednio przez O i S środki okręgów opisanych na trójkątach ABC i ADM (rys. 1). Niech symetralna odcinka BC przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punktach P i Q przy czym punkty A i P leżą po tej samej stronie prostej BC. Zauważmy, że PQ jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie ABC, zaś punkt Q jest środkiem łuku okręgu opisanego na trójkącie ABC niezawierającego A, więc leży na dwusiecznej AD trójkąta ABC.

Ponieważ $\sphericalangle QAP = \sphericalangle PMD = 90°$, to punkt P leży na okręgu opisanym na trójkącie ADM o średnicy PD. W szczególności punkt S jest środkiem odcinka PD. Ponadto punkt O jest środkiem odcinka PQ, zatem punkty O i S są odpowiednio środkami boków PQ i PD trójkąta PDQ, więc $OS \parallel DQ$, skąd teza. □



rys. 1

2. Dany jest n-elementowy podzbiór S płaszczyzny składający się z punktów o obu współrzędnych całkowitych, przy czym n jest liczbą nieparzystą. Różnowartościowa funkcja $f : S \to S$ spełnia następujący warunek: dla każdej pary punktów $A, B \in S$, odległość między punktami $f(A)$ i $f(B)$ jest nie większa niż odległość między punktami A i B. Wykazać, że istnieje taki punkt $X \in S$, że $f(X) = X$.

Autorzy zadania: Marta i Michał Strzeleccy

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód przez indukcję ze względu na n. Jeżeli $n = 1$, to teza jest oczywiście spełniona.

Niech A będzie dowolnym punktem zbioru S. Rozważmy ciąg

$$A_0 = A, A_1 = f(A), A_2 = f(f(A)), A_3 = f(f(f(A))), \ldots$$

Ponieważ zbiór S jest skończony, to pewien punkt w tym ciągu powtórzy się. Wybierzmy minimalną taką liczbę całkowitą dodatnią k, że $A_i = A_{i+k}$ dla pewnej nieujemnej liczby całkowitej i. Ponieważ f jest różnowartościową funkcją ze zbioru skończonego S w siebie, więc z równości $A_i = A_{i+k}$ wynikają kolejno równości $A_{i-1} = A_{i-1+k}$, $A_{i-2} = A_{i-2+k}, \ldots, A_0 = A_k$. Ponadto z minimalności liczby k wynika, że punkty $A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}$ są parami różne.

Jeśli k jest liczbą parzystą, to zbiór $S' = S \setminus \{A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}\}$ wraz z funkcją f zawężoną do S' spełnia warunki zadania. Z założenia indukcyjnego wynika, że istnieje taki punkt $X \in S' \subset S$, że $f(X) = X$.

Załóżmy, że k jest liczbą nieparzystą. Z warunku danego w zadaniu dostajemy, że

$$|A_0A_1| \geqslant |A_1A_2| \geqslant \ldots \geqslant |A_{k-2}A_{k-1}| \geqslant |A_{k-1}A_0| \geqslant |A_0A_1|.$$

Zatem w powyższych nierównościach musi zachodzi równość.

Oznaczmy przez (x_i, y_i) współrzędne wektora $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ dla $i = 0, 1, \ldots, k-1$, gdzie $A_k = A_0$. Ponieważ $|A_0A_1| = |A_1A_2| = \ldots = |A_{k-2}A_{k-1}| = |A_{k-1}A_0|$, to spełnione są równości

$$x_0^2 + y_0^2 = x_1^2 + y_1^2 = \ldots = x_{k-1}^2 + y_{k-1}^2. \tag{1}$$

Ponadto

$$\sum_{i=0}^{k-1} x_i = \sum_{i=0}^{k-1} y_i = 0, \tag{2}$$

gdyż $\sum_{i=0}^{k-1} \overrightarrow{A_iA_{i+1}} = \overrightarrow{A_0A_0} = \overrightarrow{0}$.

Udowodnimy, że dla dowolnej liczby nieparzystej k jeżeli liczby całkowite $x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots, x_{k-1}, y_{k-1}$ spełniają warunki (1) i (2), to $x_0 = y_0 = x_1 = y_1 = \ldots = x_{k-1} = y_{k-1} = 0$.

Przypuśćmy, że liczby całkowite $x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots, x_{k-1}, y_{k-1}$ spełniają warunki (1) i (2) i że nie wszystkie są zerami. Spośród wszystkich takich ciągów wybierzmy ten o minimalnej wartości $x_0^2 + y_0^2$. Dalej oznaczamy $d = x_0^2 + y_0^2$.

Jeżeli $d \equiv 1 \pmod 4$, to w każdej parze (x_i, y_i) jest jedna liczba parzysta i jedna liczba nieparzysta. Mamy wówczas

$$0 = \sum_{i=0}^{k-1} x_i + \sum_{i=0}^{k-1} y_i = \sum_{i=0}^{k-1} (x_i + y_i) \equiv \sum_{i=0}^{k-1} 1 = k \pmod 2.$$

Otrzymujemy sprzeczność, gdyż k jest liczbą nieparzystą.

Jeżeli $d \equiv 2 \pmod 4$, to w każdej parze (x_i, y_i) obie liczby są nieparzyste. Wówczas

$$0 = \sum_{i=0}^{k-1} x_i \equiv \sum_{i=0}^{k-1} 1 = k \pmod 2.$$

Ponownie sprzeczność z nieparzystością liczby k.

Jeżeli zaś $d \equiv 0 \pmod 4$, to w każdej parze (x_i, y_i) obie liczby są parzyste. W takim przypadku liczby

$$x_0' = \frac{x_0}{2}, y_0' = \frac{y_0}{2}, x_1' = \frac{x_1}{2}, y_1' = \frac{y_1}{2}, \ldots, x_{k-1}' = \frac{x_{k-1}}{2}, y_{k-1}' = \frac{y_{k-1}}{2}$$

są całkowite i spełniają warunki (1) i (2). Ponadto $x_0'^2 + y_0'^2 = \frac{d}{4} < d$. Otrzymaliśmy sprzeczność z minimalnością d.

Liczba d jako suma dwóch kwadratów liczb całkowitych nie daje reszty 3 z dzielenia przez 4.

Udowodniliśmy, że $x_0 = y_0 = x_1 = y_1 = \ldots = x_{k-1} = y_{k-1} = 0$. W szczególności $x_0 = y_0 = 0$, więc $\overrightarrow{A_0A_1} = \overrightarrow{0}$. Oznacza to, że $A_0 = A_1$, więc $A_0 = f(A_0)$, co kończy dowód. □

3. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste c, dla których istnieje taka funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ spełniona jest równość

$$f(f(x) + f(y)) + cxy = f(x + y).$$

Autor zadania: Paweł Służewski

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że jedyną liczbą rzeczywistą c, dla której istnieje funkcja f o żądanych własnościach jest $c = 0$.

Po pierwsze zauważmy, że jeżeli $c = 0$, to dowolna funkcja stała spełnia warunki zadania.

Niech $c > 0$ będzie taką liczbą rzeczywistą, że istnieje funkcja f o żądanych własnościach. Podstawiając $y = -x$ do równania danego w zadaniu otrzymujemy, że

$$f(f(x) + f(-x)) = f(0) + cx^2. \tag{3}$$

Niech t będzie liczbą rzeczywistą spełniającą nierówność $t \geqslant f(0)$. Ponieważ liczba t może być zapisana w postaci $t = f(0) + cx^2$ dla pewnego x, to z równości (3) wynika, że t jest wartością funkcji f.

Podstawiając do wyjściowej równości $x = 0$ dostajemy równość

$$f(f(y) + f(0)) = f(y). \tag{4}$$

Dla dowolnej liczby rzeczywistej $t \geqslant f(0)$ istnieje taka liczba rzeczywista y, że $f(y) = t$, co w połączeniu z (4) daje

$$f(t + f(0)) = t.$$

Podstawiając $s = t + f(0)$ do powyższego równania otrzymujemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $s \geqslant 2f(0)$ zachodzi wzór

$$f(s) = s - f(0). \tag{5}$$

Niech $x \geqslant 3|f(0)|$ będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Z wzoru (5) zastosowanego kilkukrotnie wynika, że

$$f(2f(x)) = f(2x - 2f(0)) = 2x - 3f(0),$$

oraz

$$f(2x) = 2x - f(0).$$

Łącząc powyższe równości z wyjściowym równaniem dostajemy, że dla dowolnego $x \geqslant 3|f(0)|$ spełniona jest równość

$$2f(0) = cx^2.$$

Ponieważ powyższa równość może zachodzić dla co najwyżej dwóch liczb x, to dostajemy sprzeczność.

Jeżeli $c < 0$, to rozumowanie przebiega analogicznie. W tym przypadku z równości (3) wynika, że każda liczba rzeczywista $t \leqslant f(0)$ jest wartością funkcji f, w konsekwencji równość (5) zachodzi dla dowolnego $s \leqslant 2f(0)$. Podobnie jak wyżej, dostajemy że dla $x \leqslant -3|f(0)|$ zachodzi równość $2f(0) = cx^2$, więc ponownie uzyskujemy sprzeczność. $\square$

LXIX Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia trzeciego
19 kwietnia 2018 r. (drugi dzień zawodów)

4. Liczbę całkowitą nazwiemy bezkwadratową, jeśli nie jest ona podzielna przez żaden kwadrat liczby całkowitej większej od 1.

Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Przyjmijmy, że w zbiorze $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ jest dokładnie M takich liczb bezkwadratowych k, że liczba $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ jest nieparzysta. Wykazać, że liczba M jest nieparzysta.

Uwaga: Dla danej liczby rzeczywistej x, przez $\lfloor x \rfloor$ oznaczamy największą liczbę całkowitą nie większą od x.

Autor zadania: Mariusz Skałba

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód przez indukcję ze względu na n. Po pierwsze zauważmy, że dla $n = 1$ mamy $M = 1$ i teza zadania jest spełniona.

Przypuśćmy, że teza zadania jest spełniona dla pewnej liczby n, udowodnimy, że jest spełniona dla $n+1$. Niech k będzie liczbą całkowitą dodatnią. Zapiszmy $n + 1 = qk + r$, gdzie q, r są całkowite i $0 \leqslant r < q$. Mamy $\lfloor \frac{n+1}{k} \rfloor = q$ oraz

$$\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor = \begin{cases} q & \text{gdy } r > 0, \\ q-1 & \text{gdy } r = 0. \end{cases}$$

Oznacza to, że liczby $\lfloor \frac{n+1}{k} \rfloor$ i $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ są różnej parzystości wtedy i tylko wtedy, gdy $k \mid n+1$.

Jeśli $n + 1 = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_\ell^{a_\ell}$, gdzie $p_1 < p_2 < \ldots < p_\ell$ są liczbami pierwszymi, to dzielniki bezkwadratowe liczby $n+1$ są postaci $p_1^{e_1} p_2^{e_2} \ldots p_\ell^{e_\ell}$, gdzie $e_1, e_2, \ldots, e_\ell \in \{0, 1\}$, więc jest ich 2^ℓ. Oznacza to, że po przejściu od n do $n+1$, dokładnie 2^ℓ spośród liczb postaci $\lfloor \frac{n+1}{k} \rfloor$, gdzie liczba k jest bezkwadratowa, ma inną parzystość niż $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$. Skoro $\ell \geqslant 1$ to liczba 2^ℓ jest parzysta, a więc parzystość liczby M nie zmienia się. $\square$

5. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AB < AC$. Punkty E i F są spodkami jego wysokości opuszczonych odpowiednio z wierzchołków B i C. Prosta styczna w punkcie A do okręgu opisanego na trójkącie ABC przecina prostą BC w punkcie P. Prosta równoległa do prostej BC przechodząca przez punkt A przecina prostą EF w punkcie Q. Wykazać, że prosta PQ jest prostopadła do środkowej trójkąta ABC opuszczonej z wierzchołka A.

Autor zadania: Bartłomiej Bollin

Rozwiązanie:

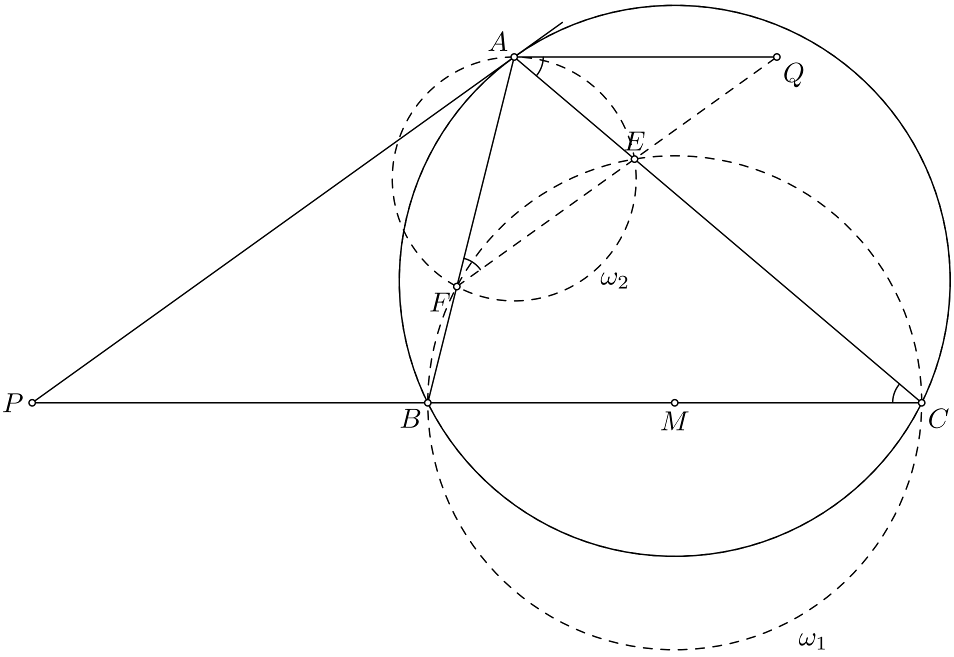
Zauważmy na początku, że na czworokącie $EFBC$ można opisać okrąg ω_1, gdyż $\sphericalangle BEC = \sphericalangle BFC = 90^\circ$. W szczególności

$$\sphericalangle EFA = 180^\circ - \sphericalangle BFE = \sphericalangle ACB = \sphericalangle EAQ,$$

gdzie ostatnia równość wynika z równoległości prostych AQ i BC.

Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą wynika, że okrąg ω_2 opisany na trójkącie AFE jest styczny do prostej AQ. Wobec tego z twierdzenia o trzech osiach potęgowych zastosowanego dla punktu A i okręgów ω_1 oraz ω_2 wynika, że punkt Q leży na osi potęgowej punktu A i okręgu ω_1.

Ponownie korzystając z twierdzenia o trzech osiach potęgowych dla punktu A, okręgu opisanego na trójkącie ABC i okręgu ω_1 dostajemy, że punkt P leży na osi potęgowej punktu A i okręgu ω_1.



rys. 2

Zatem prosta PQ jest osią potęgową punktu A i okręgu ω_1, więc w szczególności jest ona prostopadła do prostej łączącej punkt A ze środkiem ω_1, czyli do prostej AM. $\square$

6. Dana jest liczba pierwsza p większa od 3. Niech K oznacza liczbę takich permutacji $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ zbioru $\{1, 2, \ldots, p\}$, że liczba

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{p-1}a_p + a_pa_1$$

jest podzielna przez p. Udowodnić, że liczba $K + p$ jest podzielna przez p^2.

Autor zadania: Michał Pilipczuk

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez A zbiór wszystkich permutacji zbioru $\{1, 2, \ldots, p\}$ które spełniają warunek dany w zadaniu. Ponadto dla liczby całkowitej a niech $\overline{a}$ oznacza tę liczbę ze zbioru $\{1, 2, \ldots, p\}$, która daję tę samą resztę z dzielenia przez p co a.

Rozważmy odwzorowania

$$S : A \ni (a_1, a_2, \ldots, a_p) \to (a_p, a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}) \in A,$$

$$T : A \ni (a_1, a_2, \ldots, a_p) \to (\overline{a_1 + 1}, \overline{a_2 + 1}, \ldots, \overline{a_p + 1}) \in A.$$

Ponieważ liczba

$$(a_1 + 1)(a_2 + 1) + (a_2 + 1)(a_3 + 1) + \ldots + (a_p + 1)(a_1 + 1)-$$
$$-(a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_pa_1) = 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_p) + p = p(p + 1) + p$$

jest podzielna przez p, mamy $\sigma \in A \iff T(\sigma) \in A \iff S(\sigma) \in A$.

Zauważmy, że dla dowolnej permutacji $\sigma = (a_1, a_2, \ldots, a_p)$ spełnione są warunki

$$S^p(\sigma) := \underbrace{S(S(\ldots S(\sigma)))}_{\text{p razy}} = \sigma, \quad T^p(\sigma) := \underbrace{T(T(\ldots T(\sigma)))}_{\text{p razy}} = \sigma, \tag{6}$$

$$S(T(\sigma)) = (\overline{a_p + 1}, \overline{a_1 + 1}, \ldots, \overline{a_{p-1} + 1}) = T(S(\sigma)). \tag{7}$$

Niech $\sigma \in A$, definiujemy zbiór

$$\mathcal{O}(\sigma) = \{S^i(T^j(\sigma)) \mid 1 \leqslant i, j \leqslant p\}.$$

Wykażemy, że jeżeli $\sigma, \tau \in A$, to $\mathcal{O}(\sigma) = \mathcal{O}(\tau)$ lub $\mathcal{O}(\sigma) \cap \mathcal{O}(\tau) = \emptyset$. Przypuśćmy, że $\mu \in \mathcal{O}(\sigma) \cap \mathcal{O}(\tau)$. Wówczas

$$\mu = S^a(T^b(\sigma)) \qquad \text{dla pewnych } 1 \leqslant a, b \leqslant p,$$

więc

$$\mathcal{O}(\mu) = \{S^{i+a}(T^{j+b}(\sigma)) \mid 1 \leqslant i, j \leqslant p\}.$$

Z warunku (6) wynika, że dla $S^{i+a} = S^{\overline{i+a}}$ oraz $T^{j+b} = T^{\overline{j+b}}$, więc

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(\mu) &= \{S^{i+a}(T^{j+b}(\sigma)) \mid 1 \leqslant i, j \leqslant p\} = \\ &= \{S^{\overline{i+a}}(T^{\overline{j+b}}(\sigma)) \mid 1 \leqslant i, j \leqslant p\} = \\ &= \{S^{i}(T^{j}(\sigma)) \mid 1 \leqslant i, j \leqslant p\} = \mathcal{O}(\sigma).\end{aligned}$$

Analogicznie dowodzimy, że $\mathcal{O}(\mu) = \mathcal{O}(\tau)$. Ostatecznie $\mathcal{O}(\sigma) = \mathcal{O}(\tau)$. Ponieważ zbiory $\mathcal{O}(\sigma)$, $\mathcal{O}(\tau)$ są albo równe, albo rozłączne, to możemy wybrać takie $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$, że dla dowolnych $1 \leqslant i < j \leqslant k$ zachodzi $\mathcal{O}(\sigma_i) \cap \mathcal{O}(\sigma_j) = \emptyset$ oraz dla każdego $\sigma \in A$ istnieje takie $1 \leqslant i \leqslant k$, że $\mathcal{O}(\sigma_i) = \mathcal{O}(\sigma)$. Wówczas oczywiście $A = \bigcup\limits_{i=1}^{k} \mathcal{O}(\sigma_i)$.

Udowodnimy, że wśród zbiorów $\mathcal{O}(\sigma_1), \mathcal{O}(\sigma_2), \ldots, \mathcal{O}(\sigma_k)$ jest dokładnie $p-1$ zbiorów p-elementowych, oraz $k-(p-1)$ zbiorów p^2-elementowych.

Przypuśćmy, że zbiór $\mathcal{O}(\sigma)$ ma mniej niż p^2 elementów. Wówczas

$$S^{i_1}(T^{j_1}(\sigma)) = S^{i_2}(T^{j_2}(\sigma)),$$

gdzie $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$ oraz $1 \leqslant i_1, j_1, i_2, j_2 \leqslant p$. Mamy $S^{\overline{i_1-i_2}}(T^{\overline{j_1-j_2}}(\sigma)) = \sigma$. Oznaczmy $\sigma = (a_1, a_2, \ldots, a_p)$, $i = \overline{i_1 - i_2}$ oraz $j = \overline{j_1 - j_2}$. Zmieniając ewentualnie permutację σ na jej cykliczne przesunięcie możemy założyć, że $a_1 = p$.

Po pierwsze zauważmy, że nie może zachodzić równość $i = p$. Istotnie, jeżeli $i = p$, to $T^j(\sigma) = \sigma$, więc $a_1 = \overline{a_1 + j}$, skąd $j = p$. Jednak jeżeli $i = j = p$, to $i_1 = i_2$ i $j_1 = j_2$ wbrew założeniom.

Z równości $S^i(T^j(\sigma)) = \sigma$ wynika, że

$$\overline{a_{\overline{t+i}} + j} = a_t, \qquad \text{dla} \qquad t = 1, 2, \ldots, p. \tag{8}$$

Ponieważ $i \neq p$, to istnieje taka liczba $1 \leqslant s \leqslant p-1$, że $si \equiv 1 \pmod{p}$. Stosując warunek (8) s-krotnie otrzymujemy, że dla $t = 1, 2, \ldots, p$ zachodzi wzór

$$a_t = \overline{a_{\overline{t+si}} + sj} = \overline{a_{\overline{t+1}} + sj}.$$

Oznaczmy $m = \overline{sj}$. Otrzymujemy, że $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ jest ciągiem arytmetycznym o różnicy m, danym wzorem

$$a_t = \overline{(t-1)m}, \qquad \text{dla} \qquad t = 1, 2, \ldots, p. \tag{9}$$

Ponieważ

$$S(\sigma) = (\overline{(p-1)m}, \overline{pm}, \ldots, \overline{(p-2)m}) = T^{\overline{(p-1)m}}(\sigma),$$

to wszystkie permutacje w zbiorze $\mathcal{O}(\sigma)$ dają się przedstawić w jednej z postaci $T(\sigma), T^2(\sigma), \ldots, T^{p-1}(\sigma)$. Otrzymane w ten sposób permutacje są parami różne, a ciągi je tworzące są wszystkimi ciągami arytmetycznymi o różnicy m.

Udowodniliśmy więc, że jeżeli zbiór $\mathcal{O}(\sigma)$ ma mniej niż p^2 elementów, to ma dokładnie p elementów i składa się z ciągów arytmetycznych o pewnej ustalonej różnicy $1 \leqslant m \leqslant p-1$.

Odwrotnie, niech $1 \leqslant m \leqslant p-1$ i niech $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ będzie permutacją zadaną wzorem (9). Sprawdźmy, że spełnia ona warunek dany w zadaniu. Mamy

$$\sum_{i=1}^{p} a_i a_{\overline{i+1}} \equiv \sum_{i=1}^{p} m(i-1) \cdot mi = m^2 \left(\sum_{i=1}^{p} i(i-1) \right)$$
$$= m^2 \cdot \frac{(p-1)p(p+1)}{3} \equiv 0 \pmod{p},$$

gdzie w ostatniej kongruencji wykorzystaliśmy warunek $p > 3$.

Ostatecznie wykazaliśmy, że wśród zbiorów $\mathcal{O}(\sigma_1), \mathcal{O}(\sigma_2), \ldots, \mathcal{O}(\sigma_k)$ jest $p-1$ zbiorów p-elementowych, złożonych z ciągów arytmetycznych o różnicach odpowiednio $1, 2, \ldots, p-1$ oraz $k-(p-1)$ zbiorów p^2-elementowych. Zatem

$$K + p = |A| + p = p + \sum_{i=1}^{k} |\mathcal{O}(\sigma_i)| =$$
$$= p + p(p-1) + p^2 \cdot (k - (p-1)) = p^2(k - (p-1) + 1),$$

jest liczbą podzielną przez p^2, co należało udowodnić. □

(db,mg)