LXX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego
I seria: 3 września 2018 r. — 5 października 2018 r.

1. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka dodatnia liczba całkowita k, że w zapisie dziesiętnym liczby 2^k każda z cyfr $0, 1, \ldots, 9$ występuje taką samą liczbę razy.

2. Wysokości nierównoramiennego, ostrokątnego trójkąta ABC przecinają się w punkcie H. Punkt S jest środkiem tego łuku BC okręgu opisanego na trójkącie BCH, który zawiera punkt H. Wyznaczyć miarę kąta BAC, jeśli spełniona jest równość $AH = AS$.

3. Rozstrzygnąć, czy istnieją takie parami różne liczby wymierne a, b, c, że wielomiany

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \quad \text{i} \quad Q(x) = x^3 + bx^2 + cx + a$$

mają wspólny pierwiastek niewymierny.

4. Szachownicę o wymiarach 2018×2018 przykryto przy pomocy jednej kwadratowej płytki o wymiarach 2×2 oraz $\frac{2018^2-4}{5}$ prostokątnych płytek o wymiarach 1×5 w taki sposób, że każde pole szachownicy jest przykryte przez dokładnie jedną płytkę (płytki można obracać). Wykazać, że płytka 2×2 nie przykrywa żadnego pola o krawędzi zawartej w brzegu szachownicy.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

5 października 2018 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane. Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.

LXX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego
II seria: 6 października 2018 r. — 5 listopada 2018 r.

5. Wyznaczyć wszystkie szóstki $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ liczb rzeczywistych o następującej własności: dla $i = 1, 2, 3$ liczby a_{i+1} i b_{i+1} są różnymi pierwiastkami równania $x^2 + a_i x + b_i = 0$, przy czym przyjmujemy $a_4 = a_1$ oraz $b_4 = b_1$.

6. Sto osób usiadło w równych odstępach przy okrągłym, obrotowym stole. Każda z osób zamówiła lody, przy czym 51 osób zamówiło lody śmietankowe, a pozostałe 49 osób zamówiło lody czekoladowe. Przed każdą z osób postawiono lody o smaku niekoniecznie zgodnym z jej zamówieniem, przy czym w sumie podano 51 lodów śmietankowych oraz 49 czekoladowych. Wykazać, że stół można tak obrócić, by co najmniej 52 osoby miały przed sobą lody w zamówionym przez siebie smaku.

7. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD. Punkty P i Q leżą odpowiednio na ramionach BC i AD, przy czym $\sphericalangle APB = \sphericalangle CPD$ oraz $\sphericalangle AQB = \sphericalangle CQD$. Udowodnić, że symetralna odcinka PQ przechodzi przez punkt przecięcia przekątnych trapezu $ABCD$.

8. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $n \geqslant 1$, dla których w pola kwadratowej tablicy o wymiarach $n \times n$ można tak wpisać parami różne kwadraty liczb całkowitych, by suma liczb w każdym wierszu i w każdej kolumnie tablicy była kwadratem liczby całkowitej oraz te $2n$ sum było parami różnych.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

5 listopada 2018 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane. Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.

LXX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego
III seria: 6 listopada 2018 r. — 5 grudnia 2018 r.

9. Dany jest czworościan $ABCD$, którego wszystkie ściany są ostrokątne. Punkt X jest środkiem dłuższego łuku BC okręgu opisanego na ścianie BCD. Punkt Y jest środkiem dłuższego łuku CA okręgu opisanego na ścianie CAD. Punkt Z jest środkiem dłuższego łuku AB okręgu opisanego na ścianie ABD. Udowodnić, że punkty D, X, Y, Z leżą na jednym okręgu.

10. Dowieść, że jeśli dodatnie liczby całkowite x, y, z, t spełniają równanie

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2018!\,,$$

to każda z liczb x, y, z, t jest większa od 10^{250}.

11. W turnieju badmintona wzięło udział $2n$ zawodników, gdzie $n \geqslant 15$ jest liczbą całkowitą. Każda para zawodników rozegrała dokładnie jeden mecz, nie było remisów. Gdy dla każdego zawodnika policzono, z iloma innymi zawodnikami wygrał, to okazało się, że żadnych pięciu zawodników nie uzyskało takiego samego wyniku. Wykazać, że zawodników można tak podzielić na grupy A i B, każdą złożoną z n zawodników, by wśród meczów pomiędzy zawodnikami z grupy A i zawodnikami z grupy B co najmniej 60% było wygranych przez zawodników z grupy A.

12. Dana jest dodatnia liczba całkowita k. Ciąg dodatnich liczb rzeczywistych $a_1, a_2, a_3, \ldots$ spełnia równość

$$a_{n+1} = a_n + \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \qquad \text{dla wszystkich } n \geqslant k.$$

Wykazać, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita N, że

$$N^k \leqslant a_N \leqslant \left(1 + \frac{1}{k}\right)^N .$$

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

5 grudnia 2018 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane. Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.

Adresy Komitetów Okręgowych Olimpiady Matematycznej

- Dla województwa pomorskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego,
  ul. Wita Stwosza 57, 80–952 Gdańsk.
- Dla województwa śląskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego,
  ul. Bankowa 14, 40-007 Katowice.
- Dla województwa małopolskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego,
  ul. Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków.
- Dla województwa lubelskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Zakład Rachunku Prawdopodobieństwa pok. 810, Instytut Matematyki Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej,
  pl. Marii Curie-Skłodowskiej 1, 20-031 Lublin.
- Dla województwa łódzkiego i świętokrzyskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego,
  ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.
- Dla województwa wielkopolskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Adama Mickiewicza,
  ul. Umultowska 87, 61-614 Poznań.
- Dla województwa podkarpackiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyczno-Przyrodniczy Uniwersytetu Rzeszowskiego,
  ul. Pigonia 1, 35-959 Rzeszów
- Dla województwa lubuskiego i zachodniopomorskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Szczecińskiego,
  ul. Wielkopolska 15, 70-451 Szczecin.
- Dla województwa kujawsko-pomorskiego i warmińsko-mazurskiego: — Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.
- Dla województwa mazowieckiego i podlaskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk,
  ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa.
- Dla województwa dolnośląskiego i opolskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego,
  pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: www.om.edu.pl