LXX Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia pierwszego
3 września – 5 października 2018 r. (pierwsza seria)

1. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka dodatnia liczba całkowita k, że w zapisie dziesiętnym liczby 2^k każda z cyfr $0, 1, 2, \ldots, 9$ występuje taką samą liczbę razy.

Autor zadania: Michał Pilipczuk

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Taka liczba **nie** istnieje.

Załóżmy, że taka liczba całkowita k istnieje i niech ℓ będzie liczbą wystąpień każdej z cyfr $0, 1, \ldots, 9$ w zapisie dziesiętnym liczby 2^k. Wówczas suma cyfr liczby 2^k jest równa

$$\ell(0 + 1 + 2 + \ldots + 9) = 45\ell,$$

czyli jest liczbą podzielną przez 3. Jednakże z cechy podzielności liczby przez 3 wynika, że 2^k jest również podzielna przez 3 – sprzeczność. $\square$

2. Wysokości nierównoramiennego, ostrokątnego trójkąta ABC przecinają się w punkcie H. Punkt S jest środkiem tego łuku BC okręgu opisanego na trójkącie BCH, który zawiera punkt H. Wyznaczyć miarę kąta BAC, jeśli spełniona jest równość $AH = AS$.

Autor zadania: Dominik Burek

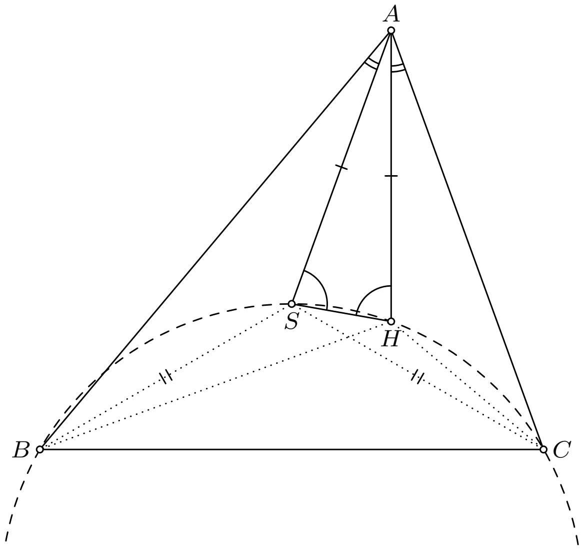
Rozwiązanie:

Odpowiedź: Szukana miara kąta wynosi $60°$.

Bez szkody dla ogólności załóżmy, że $AB > AC$. Oznaczmy przez α, β i γ miary kątów wewnętrznych trójkąta przy wierzchołkach odpowiednio A, B i C. Ponieważ H to ortocentrum trójkąta ABC, to

$$\sphericalangle CHA = 180° - (90° - \gamma + 90° - \alpha) = \gamma + \alpha = 180° - \beta. \tag{1}$$

Punkty B, S, H i C leżą na jednym okręgu, stąd



rys. 1

$$\sphericalangle BSC = \sphericalangle BHC = 180° - \alpha,$$

gdzie w ostatniej równości wykorzystujemy analogiczną równość jak w (1). Ponadto $BS = SC$, więc $\sphericalangle CBS = \sphericalangle SCB = \frac{1}{2}\alpha$. Ponownie wykorzystując fakt, iż na czworokącie $BSHC$ można opisać okrąg dostajemy, że $\sphericalangle SHC = 180^\circ - \frac{1}{2}\alpha$. Zatem

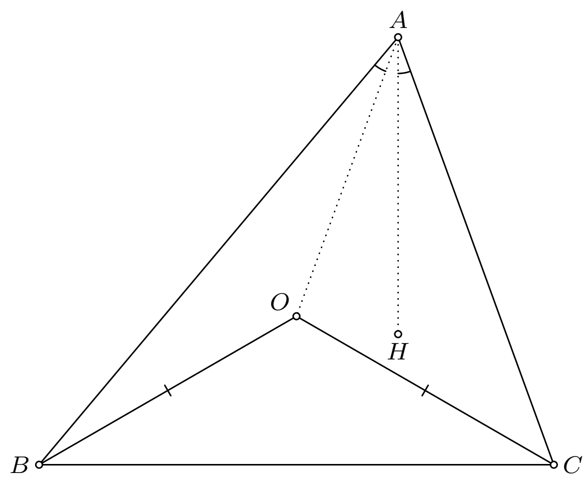
$$\sphericalangle HSA = \sphericalangle AHS = 360^\circ - \sphericalangle CHA - \sphericalangle SHC = 360^\circ - (180^\circ - \beta) - \left(180^\circ - \frac{1}{2}\alpha\right) = \beta + \frac{1}{2}\alpha.$$

W czworokącie $BSHC$, wpisanym w okrąg, zachodzi równość $\sphericalangle CSH = \sphericalangle CBH = 90^\circ - \gamma$. Oczywiście $\sphericalangle BSC = 180^\circ - \alpha$, więc

$$\begin{aligned}\sphericalangle ASB &= 360^\circ - (\sphericalangle BSC + \sphericalangle CSH + \sphericalangle HSA) = \\ &= 360^\circ - \left(180^\circ - \alpha + 90^\circ - \gamma + \beta + \frac{1}{2}\alpha\right) = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha + \gamma - \beta.\end{aligned}$$

Wobec tego

$$\begin{aligned}\sphericalangle BAS &= 180^\circ - \sphericalangle ASB - \sphericalangle SBA = \\ &= 180^\circ - \left(90^\circ + \frac{1}{2}\alpha + \gamma - \beta\right) - \left(\beta - \frac{1}{2}\alpha\right) = 90^\circ - \gamma = \sphericalangle HAC. \end{aligned} \tag{2}$$



rys. 2

Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Wówczas $OB = OC$ oraz

$$\sphericalangle BAO = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle AOB) = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\gamma) = 90^\circ - \gamma = \sphericalangle HAC.$$

Skoro $SB = SC$ oraz zachodzi równość (2), to $S = O$. W szczególności $2\alpha = \sphericalangle BSC = 180^\circ - \alpha$, więc $\alpha = 60^\circ$. □

3. Rozstrzygnąć, czy istnieją parami różne liczby wymierne a, b, c, że wielomiany

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \quad \text{i} \quad Q(x) = x^3 + bx^2 + cx + a$$

mają wspólny pierwiastek niewymierny.

Autor zadania: Andrzej Fryszkowski

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Takie liczby **nie** istnieją.

Jeżeli x jest wspólnym pierwiastkiem wielomianów P i Q, to jest również pierwiastkiem wielomianu

$$P(x) - Q(x) = (a-b)x^2 + (b-c)x + (c-a) = (a-b)(x-1)\left(x - \frac{c-a}{a-b}\right).$$

Oznacza to, że $x = 1$ lub $x = \dfrac{c-a}{a-b}$. Ponieważ liczby a, b, c są wymierne, to obie te liczby są wymierne, więc liczby wymierne a, b, c o szukanej własności nie istnieją. $\square$

4. Szachownicę o wymiarach 2018×2018 przykryto przy pomocy jednej kwadratowej płytki o wymiarach 2×2 oraz $\frac{2018^2-4}{5}$ prostokątnych płytek o wymiarach 1×5 w taki sposób, że każde pole szachownicy jest przykryte przez dokładnie jedną płytkę (płytki można obracać). Wykazać, że płytka 2×2 nie przykrywa żadnego pola o krawędzi zawartej w brzegu szachownicy.

Autor zadania: Michał Pilipczuk

Rozwiązanie:

Zauważmy, że ze względu na symetrię wystarczy udowodnić, że płytka 2×2 nie może zakrywać pól z pierwszych dwóch wierszy szachownicy, których pewna krawędź jest zawarta w brzegu szachownicy.

W każde pole szachownicy wpisujemy numer jego wiersza. Reszta z dzielenia przez 5 sumy wpisanych liczb wynosi

$$S = 2018 \cdot (1 + 2 + \ldots + 2018) \equiv 3 \cdot (1 + 2 + 3) \equiv 3 \pmod 5.$$

1	1	1	1	1	1	1	$\cdots$	1
2	2	2	2	2	2	2	$\cdots$	2
3	3	3	3	3	3	3	$\cdots$	3
4	4	4	4	4	4	4	$\cdots$	4
5	5	5	5	5	5	5	$\cdots$	5
6	6	6	6	6	6	6	$\cdots$	6
7	7	7	7	7	7	7	$\cdots$	7
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
2018	2018	2018	2018	2018	2018	2018	$\cdots$	2018

rys. 3

Jeżeli płytka o wymiarach 2×2 leży w pierwszym i drugim wierszu szachownicy, to suma przykrytych przez nią pól wynosi $K = 2 \cdot (1 + 2) = 6$. Każda płytka 1×5 przykrywa albo pięć takich samych liczb albo pięć kolejnych liczb, zatem suma liczb przykrytych przez taką płytkę jest podzielna przez 5. Ponieważ $S \not\equiv K \pmod 5$, to nie jest możliwe aby cała szachownica była pokryta. $\square$

5. Znaleźć wszystkie szóstki $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ liczb rzeczywistych o następującej własności: dla $i = 1, 2, 3$ liczby a_{i+1} i b_{i+1} są różnymi pierwiastkami równania $x^2 + a_i x + b_i = 0$, przy czym przyjmujemy $a_4 = a_1$ oraz $b_4 = b_1$.

Autor zadania: Marcin Kuczma

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzorów Viète'a warunki dane w zadaniu można zapisać jako układ równań

$$\begin{cases} a_1 + b_1 & = -a_3 \\ a_2 + b_2 & = -a_1 \\ a_3 + b_3 & = -a_2 \\ a_1 b_1 & = b_3 \\ a_2 b_2 & = b_1 \\ a_3 b_3 & = b_2 \end{cases}$$

Przypuśćmy, że którąś z liczb b_1, b_2, b_3 jest równa 0. Bez straty ogólności niech $b_1 = 0$. Wówczas korzystając z czwartego równania dostajemy $b_3 = 0$, a następnie z szóstego równania $b_2 = 0$. Pierwsze trzy równania przyjmują postać

$$\begin{cases} a_1 = -a_3 \\ a_2 = -a_1 \\ a_3 = -a_2 \end{cases}$$

więc $a_1 = -a_3 = -(-a_2) = -(-(-a_1)) = -a_1$, czyli $a_1 = 0$. Oznacza to, że w tym przypadku liczby a_1,b_1 nie są różne co przeczy założeniu zadania.

Dalej, możemy założyć, że $b_1 b_2 b_3 \neq 0$. Mnożąc stronami trzy ostatnie równania dostajemy

$$a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_3 = b_1 b_2 b_3,$$

więc $a_1 a_2 a_3 = 1$. Pierwsze trzy równania zapisujemy jako

$$\begin{cases} b_1 = -a_1 - a_3 \\ b_2 = -a_2 - a_1 \\ b_3 = -a_3 - a_2 \end{cases}$$

Wyliczone wartości b_1, b_2, b_3 podstawiamy do trzech ostatnich równań i otrzymujemy

$$\begin{cases} a_1(a_1 + a_3) = a_2 + a_3 \\ a_2(a_2 + a_1) = a_3 + a_1 \\ a_3(a_3 + a_2) = a_1 + a_2 \end{cases}$$

Ponieważ $a_1 a_2 a_3 = 1$, to mamy dwa przypadki: albo wszystkie liczby a_1, a_2, a_3 są dodatnie, albo jedna liczba spośród a_1, a_2, a_3 jest dodatnia a pozostałe są ujemne.

Przypuśćmy, że liczby a_1, a_2, a_3 są dodatnie. Bez straty ogólności, niech $a_1 = \max\{a_1, a_2, a_3\}$. Mamy $1 = a_1 a_2 a_3 \leqslant a_1^3$, więc $1 \leqslant a_1$. Zatem

$$a_2 + a_3 = a_1(a_1 + a_3) \geqslant a_1 + a_3,$$

czyli $a_2 \geqslant a_1 \geqslant 1$. Podobnie wykazujemy, że $a_3 \geqslant a_2 \geqslant a_1$. Z założenia $a_1 = \max\{a_1, a_2, a_3\}$ otrzymujemy $a_1 = a_2 = a_3$, a skoro $a_1 a_2 a_3 = 1$, to $a_1 = a_2 = a_3 = 1$. Podstawiając, te wartości do pierwszych trzech równań wyjściowego układu dostajemy $b_1 = b_2 = b_3 = -2$. Ostatecznie rozwiązaniem jest szóstka $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) = (1, 1, 1, -2, -2, -2)$.

Rozważmy teraz przypadek, w którym jedna liczba spośród a_1, a_2, a_3 jest dodatnia a pozostałe ujemne. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $a_1 > 0$ oraz $a_2, a_3 < 0$. Ponieważ $a_2, a_3 < 0$, to $0 > (a_2 + a_3) = a_1(a_1 + a_3)$, więc $a_1 + a_3 < 0$. Podobnie ponieważ $a_3, a_2 + a_3 < 0$, to $0 < a_3(a_2 + a_3) = a_1 + a_2$. Oznacza to, że

$$|a_3| = -a_3 > a_1 = |a_1| > -a_2 = |a_2|.$$

Mamy $1 = a_1 a_2 a_3 = |a_1 a_2 a_3| = |a_1||a_2||a_3| \leqslant |a_3|^3$, więc $|a_3| \geqslant 1$. Ponieważ $a_3(a_3 + a_2) = a_1 + a_2$, to

$$|a_1| > |a_1| - |a_2| = a_1 + a_2 = |a_1 + a_2| = |a_3(a_3 + a_2)| = |a_3||a_3 + a_2| \geqslant |a_3 + a_2| = |a_3| + |a_2| > |a_3|.$$

Jest to sprzeczne z nierównością $|a_3| > |a_1|$, więc w tym przypadku nie ma rozwiązań.

Ostatecznie jedynym rozwiązaniem $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ spełniającym warunki zadania jest szóstka $(1, 1, 1, -2, -2, -2)$. $\square$

6. Sto osób usiadło w równych odstępach przy okrągłym, obrotowym stole. Każda z osób zamówiła lody, przy czym 51 osób zamówiło lody śmietankowe, a pozostałe 49 osób zamówiło lody czekoladowe. Przed każdą z osób postawiono lody o smaku niekoniecznie zgodnym z jej zamówieniem, przy czym w sumie podano 51 lodów śmietankowych oraz 49 czekoladowych. Wykazać, że stół można tak obrócić, by co najmniej 52 osoby miały przed sobą lody w zamówionym przez siebie smaku

Zadanie zaproponował: Marcin Kuczma

Rozwiązanie:

Dla każdego ze 100 możliwych obrotów stołu niech odpowiednio $s_1, s_2, \ldots, s_{100}$ oznacza liczbę lodów śmietankowych, które zostałyby prawidłowo dostarczone, gdyby wykonać dany obrót. Ponieważ każda porcja lodów śmietankowych jest prawidłowo dostarczona przy 51 różnych obrotach, to

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_{100} = 51 \cdot 51 = 2601.$$

Niech $s = \max\{s_1, s_2, \ldots, s_{100}\}$. Mamy

$$100 \cdot s \geqslant s_1 + s_2 + \ldots + s_{100} = 2601,$$

więc $s \geqslant 26,01$. Ponieważ s jest liczbą całkowitą, to $s \geqslant 27$. Zauważmy, że jeżeli s porcji lodów śmietankowych jest prawidłowo dostarczonych, to $51 - s$ lodów śmietankowych jest dostarczonych nieprawidłowo, więc $49 - (51 - s) = s - 2$ miłośników lodów czekoladowych otrzymało zamówione lody. Oznacza to, że w tym przypadku

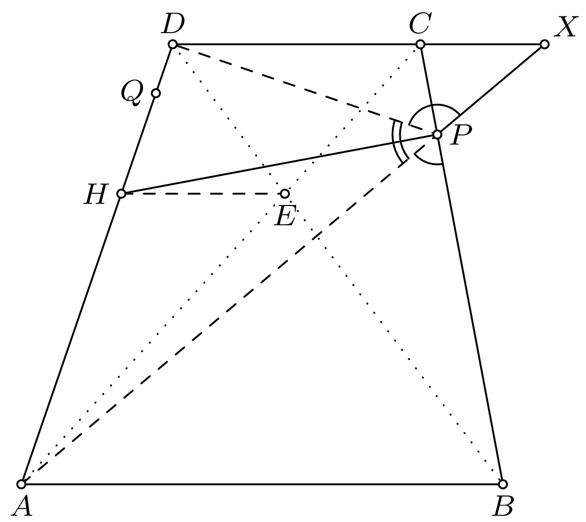
$$s + (s - 2) = 2s - 2 \geqslant 2 \cdot 27 - 2 = 52$$

osób otrzyma lody, które zamówiło. Co było do udowodnienia. $\square$

7. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD. Punkty P i Q leżą na ramionach BC i AD, przy czym $\sphericalangle APB = \sphericalangle CPD$ oraz $\sphericalangle AQB = \sphericalangle CQD$. Udowodnić, że symetralna odcinka PQ przechodzi przez punkt przecięcia przekątnych trapezu $ABCD$.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:



rys. 4

Niech H będzie punktem przecięcia dwusiecznej kąta DPA z ramieniem AD. Ponadto oznaczmy przez E i X punkty odpowiednio przecięcia DC i AP oraz przekątnych w trapezie $ABCD$ (rys. 1).

Na podstawie twierdzenia o dwusiecznej w trójkątach DPA i XPD zachodzą równości

$$\frac{DH}{HA}=\frac{DP}{PA} \quad \text{oraz} \quad \frac{DP}{PX}=\frac{DC}{CX}.$$

Ponadto z podobieństwa trójkątów CXP oraz PBA widzimy, że $\dfrac{PA}{PX}=\dfrac{AB}{CX}$. Łącząc te trzy równości dostajemy

$$\frac{DH}{HA}=\frac{DP}{PA}=\frac{\frac{DC}{CX}\cdot PX}{\frac{AB}{CX}\cdot PX}=\frac{DC}{AB}=\frac{DE}{EB}, \tag{3}$$

gdzie w ostatnim kroku wykorzystaliśmy podobieństwo trójkątów EBA i DCE.

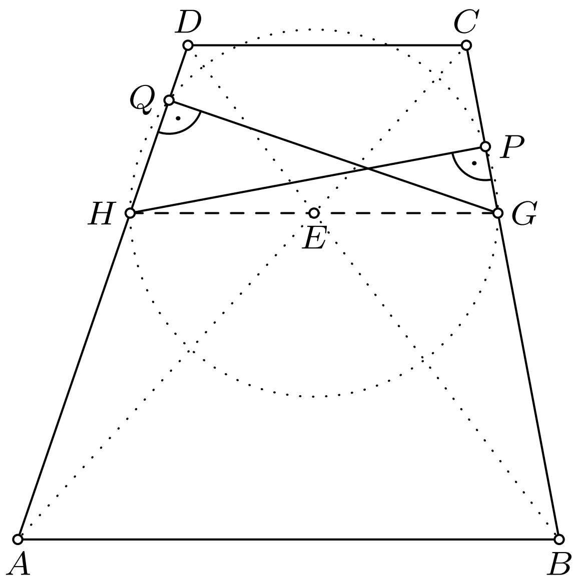
Równość (3) oznacza, że $HE \parallel DC$. Podobnie, gdy przez G oznaczymy punkt przecięcia dwusiecznej kąta BQC z ramieniem BC, to $EG \parallel DC$, więc punkty H, E i G leżą na jednej prostej równoległej do podstaw trapezu.

Korzystając z podobieństwa odpowiednich trójkątów HDE, ADB, ECG i ACB mamy

$$\frac{HE}{AB}=\frac{DE}{DB}=\frac{CE}{CA}=\frac{EG}{AB},$$

skąd $HE=EG$. Zauważmy ponadto, że $\sphericalangle HPB=90^\circ$, gdyż proste HP i BC są dwusiecznymi kąta wewnętrznego i zewnętrznego DPA. Analogicznie $\sphericalangle HQG=90^\circ$.

Łącząc uzyskane fakty widzimy, że na czworokącie $HQPG$ można opisać okrąg, którego środkiem jest punkt E. W szczególności symetralna PQ przechodzi przez punkt E, skąd teza. □



rys. 5

8. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $n \geqslant 1$, dla których w pola kwadratowej tablicy o wymiarach $n \times n$ można tak wpisać parami różne kwadraty liczb całkowitych, by suma liczb w każdym wierszu i w każdej kolumnie tablicy była kwadratem liczby całkowitej oraz te $2n$ sum było parami różnych.

Autorzy zadania: Dominik Burek i Tomasz Cieśla

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Wszystkie $n \geqslant 2$.

Oczywiście dla $n=1$ sumy w jedynym wierszu i w jedynej kolumnie są takie same. Wykażemy natomiast, że dla każdego $n \geqslant 2$ można wpisać liczby w tablicę o wymiarach $n \times n$ tak, aby spełnić zadane warunki.

Definiujemy następujące liczby naturalne

$$a_1=3^{n-1},\ a_2=4\cdot 3^{n-2},\ a_3=4\cdot 3^{n-3}\cdot 5,\ \ldots,\ a_i=4\cdot 3^{n-i}\cdot 5^{i-2},\ \ldots,\ a_n=4\cdot 3^0\cdot 5^{n-2}.$$

Wtedy dla dowolnego $2 \leqslant k \leqslant n$ zachodzi równość

$$a_1^2 + \ldots + a_k^2 = 3^{2(n-k)} \cdot 5^{2(k-1)}. \tag{4}$$

Istotnie, wykażemy ją wykorzystując indukcję matematyczną. Dla $k = 2$ jest ona spełniona, gdyż

$$a_1^2 + a_2^2 = 3^{2(n-1)} + 4^2 \cdot 3^{2(n-2)} = 3^{2(n-2)} \left(4^2 + 3^2\right) = 3^{2(n-2)} \cdot 5^{2(2-1)}.$$

Dalej zakładając równość (4) dla liczby naturalnej k chcemy ją udowodnić dla $k+1$. Mamy

$$\begin{aligned} a_1^2 + \ldots + a_{k+1}^2 &= a_1^2 + \ldots + a_k^2 + \left(4 \cdot 3^{n-(k+1)} \cdot 5^{(k+1)-2}\right)^2 = \\ &= 3^{2(n-k)} \cdot 5^{2(k-1)} + 4^2 \cdot 3^{2(n-k)-2} \cdot 5^{2(k-1)} = \\ &= 3^{2(n-k)-2} \cdot 5^{2(k-1)} \cdot \left(3^2 + 4^2\right) = 3^{2(n-(k+1))} \cdot 5^{2(k+1-1)}. \end{aligned}$$

Wykorzystując teraz trójkę Pitagorejską $(7, 24, 25)$ definiujemy w analogiczny sposób liczby

$$b_1 = 7^{n-1},\ b_2 = 24 \cdot 7^{n-2},\ b_3 = 24 \cdot 7^{n-3} \cdot 25,\ \ldots,\ b_i = 24 \cdot 7^{n-i} \cdot 25^{i-2},\ \ldots,\ b_n = 24 \cdot 7^0 \cdot 25^{n-2},$$

dla których podobnie jak wyżej

$$b_1^2 + \ldots + b_k^2 = 7^{2(n-k)} \cdot 25^{2(k-1)} \quad \text{dla } 2 \leqslant k \leqslant n. \tag{5}$$

Wpiszmy w i-tym wierszu oraz j-tej kolumnie liczbę $(a_i b_j)^2 = a_i^2 b_j^2$. Wtedy suma s_i liczb w i-tym wierszu jest równa

$$s_i = \sum_{j=1}^{n} a_i^2 b_j^2 = a_i^2 \sum_{j=1}^{n} b_j^2 = \left(a_i \cdot 25^{n-1}\right)^2,$$

czyli jest kwadratem liczby całkowitej. Podobnie suma t_j liczb w j-tej kolumnie wynosi

$$t_j = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 b_j^2 = b_j^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \left(b_j \cdot 5^{n-1}\right)^2.$$

Widzimy zatem, że $s_i < s_j$ oraz $t_i < t_j$, gdyż $a_i < a_j$ i $b_i < b_j$ dla $i < j$. Ponadto $s_i \neq t_j$ dla $0 \leqslant i \leqslant n$ oraz $j < n$, gdyż wówczas s_i i t_n różnią się liczbą siódemek w rozkładzie na czynniki pierwsze. Podobnie $s_i \neq t_n$ dla $0 \leqslant i \leqslant n$, gdyż tym razem mamy różną liczbę dwójek w rozkładzie na czynniki pierwsze.

Ostatecznie $s_i \neq t_j$ dla dowolnych i, j, więc powyższa konstrukcja spełnia warunki zadania. $\square$

9. Dany jest czworościan $ABCD$, którego wszystkie ściany są ostrokątne. Punkt X jest środkiem dłuższego łuku BC okręgu opisanego na ścianie BCD. Punkt Y jest środkiem dłuższego łuku CA okręgu opisanego na ścianie CAD. Punkt Z jest środkiem dłuższego łuku AB okręgu opisanego na ścianie ABD. Udowodnić, że punkty D, X, Y, Z leżą na jednym okręgu.

Autor zadania: Tomasz Przybyłowski

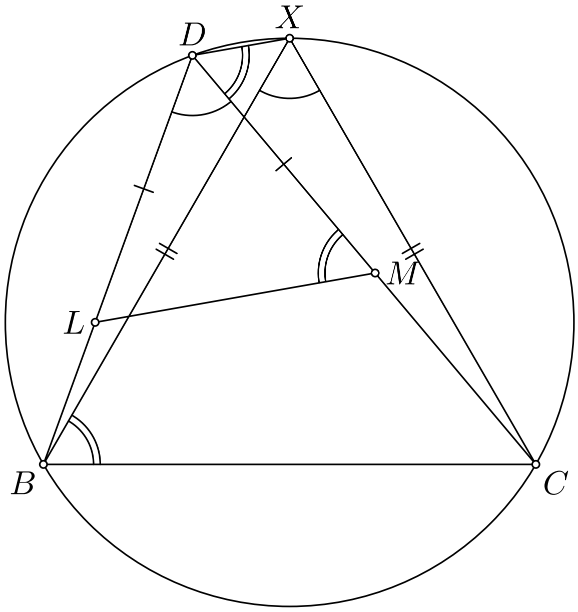
Rozwiązanie:

Niech K, L i M będą punktami leżącymi na odcinkach DA, DB i DC odpowiednio tak, że

$$DK = DL = DM.$$

Weźmy pod uwagę ścianę BDC (rys. 6). Trójkąty LDM i BXC są równoramienne oraz $\sphericalangle BDC = \sphericalangle BXC$, gdyż są to kąty wpisane oparte na łuku krótszym BC, więc są podobne. W szczególności $\sphericalangle DML = \sphericalangle CBX$. Jednakże $\sphericalangle CBX = \sphericalangle CDX$, gdyż punkty B, D, X, C leżą na jednym okręgu. Wobec tego $\sphericalangle DML = \sphericalangle CDX$, czyli $LM \parallel DX$.

Podobnie $DY \parallel MK$ oraz $DZ \parallel KL$. Niech teraz Π będzie płaszczyzną równoległą do płaszczyzny KLM przechodzącą przez punkt D. Z równoległości $DX \parallel LM$ wynika, że prosta DX jest zawarta w płaszczyźnie Π, skąd w szczególności $X \in \Pi$. Analogicznie $Y, Z \in \Pi$, więc punkty X, Y, Z i D leżą na jednej płaszczyźnie.



rys. 6

Jako, że punkty D, X, Y i Z leżą na sferze opisanej na czworościanie $ABCD$, to leżą na przecięciu płaszczyzny Π z tą sferą. Stąd punkty D, X, Y i Z leżą na jednym okręgu, co było do pokazania. □

10. Dowieść, że jeśli dodatnie liczby całkowite x, y, z, t spełniają równanie

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2018!,$$

to każda z liczb x, y, z, t jest większa od 10^{250}.

Autor zadania: Mariusz Skałba

Rozwiązanie:

Zauważmy, że kwadrat liczby parzystej daje resztę 0 lub 4 z dzielenia przez 8, podczas gdy kwadrat liczby nieparzystej daje resztę 1. Ponieważ 8 dzieli 2018!, to liczby x, y, z i t muszą być parzyste. Istotnie, liczba nieparzystych liczb musi być oczywiście parzysta. W przypadku dwóch nieparzystych, suma czterech kwadratów daje resztę 2 lub 6 przy dzieleniu przez 8. Natomiast, gdy wszystkie liczby są nieparzyste, to łącznie ich kwadraty dają resztę 4 z dzielenia przez 8.

Wobec powyższego możemy zapisać $x = 2x_1$, $y = 2y_1$, $z = 2z_1$ i $t = 2t_1$ dla pewnych liczb całkowitych x_1, y_1, z_1 i t_1. Wstawiając uzyskane wzory do wyjściowego równania dostajemy, że

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + t_1^2 = \frac{2018!}{4},$$

czyli równanie analogiczne do wyjściowego.

Zauważmy teraz, że $2^{2000} \mid 2018!$, gdyż na podstawie wzoru Legendre'a

$$v_2(2018!) = \left\lfloor \frac{2018}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2018}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2018}{8} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{2018}{2^i} \right\rfloor + \ldots > 2000,$$

gdzie dla liczby całkowitej n, symbolem $v_2(n)$ oznaczamy największą liczbę całkowitą dodatnią k, że $2^k \mid n$.

Postępując analogicznie 900 razy (możemy, gdyż $2000 > 2 \cdot 900$) jak w pierwszych dwóch akapitach dostajemy, że liczby x, y, z i t są podzielne przez 2^{900}. Pozostaje zauważyć, że

$$2^{900} = \left(2^{10}\right)^{90} > \left(10^3\right)^{90} = 10^{270} > 10^{250},$$

więc każda z liczb x, y, z i t jest większa od 10^{250}. □

11. W turnieju badmintona wzięło udział $2n$ zawodników, gdzie $n \geqslant 15$ jest liczbą całkowitą. Każda para zawodników rozegrała dokładnie jeden mecz, nie było remisów. Gdy dla każdego zawodnika policzono, z iloma innymi zawodnikami wygrał, to okazało się, że żadnych pięciu zawodników nie uzyskało takiego samego wyniku. Wykazać, że zawodników można tak podzielić na grupy A i B, każdą złożoną z n zawodników, by wśród meczów pomiędzy zawodnikami z grupy A i zawodnikami z grupy B co najmniej 60% było wygranych przez zawodników z grupy A.

Autor zadania: Michał Pilipczuk

Rozwiązanie:

Niech $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ będą liczbami gier, które wygrał odpowiednio pierwszy, drugi, ..., $2n$-ty zawodnik. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_{2n}.$$

Udowodnimy, że przy tych oznaczeniach podział $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, $B = \{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$ spełnia warunki zadania. Ponieważ każda para zawodników rozegrała dokładnie jeden mecz, to

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n} = \binom{2n}{2} = n(2n-1). \tag{6}$$

Zawodnicy z grupy A wygrali w sumie $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ gier, z czego $\binom{n}{2}$ w meczach rozegranych między sobą. Oznacza to, że zawodnicy z grupy A wygrali

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) - \binom{n}{2}$$

meczów z zawodnikami z grupy B. Pozostaje wykazać, że

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) - \binom{n}{2} \geqslant 60\% \cdot n^2 = \frac{3}{5}n^2.$$

Zauważmy, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej k spełniającej warunek $k + 4 \leqslant 2n$ zachodzi nierówność

$$a_k > a_{k+4}. \tag{7}$$

Istotnie, gdyby $a_{k+4} \geqslant a_k$, to z ciągu nierówności

$$a_k \geqslant a_{k+1} \geqslant a_{k+2} \geqslant a_{k+3} \geqslant a_{k+4} \geqslant a_k,$$

dostajemy, że $a_k = a_{k+1} = a_{k+2} = a_{k+3} = a_{k+4}$. Oznacza to, że pięciu zawodników uzyskało taki sam wynik, co przeczy założeniu zadania. Ponieważ liczby a_k, a_{k+4} są całkowite, to nierówność $a_k > a_{k+4}$ jest równoważna $a_k \geqslant 1 + a_{k+4}$.

Udowodnimy, teraz że dla dowolnego $i = 1, 2, \ldots, n$ zachodzi nierówność

$$a_i \geqslant \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + a_{n+i}.$$

Istotnie, korzystając wielokrotnie z nierówności (7) dostajemy, że

$$a_i \geqslant 1 + a_{i+4} \geqslant 2 + a_{i+4\cdot 2} \geqslant \ldots \geqslant \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + a_{i+4\cdot\lfloor\frac{n}{4}\rfloor} \geqslant \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + a_{i+n}.$$

Sumując uzyskane nierówności dla $i = 1, 2, \ldots, n$ stronami uzyskujemy, że

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant n\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{2n}. \tag{8}$$

Wróćmy do rozwiązania zadania. Korzystając z równości (6) i nierówności (8) dostajemy, że

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant n\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{2n} = n\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + n(2n-1) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n),$$

więc

$$2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \geqslant n\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + n(2n-1).$$

Wystarczy udowodnić, że

$$n\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor + n(2n-1) \geqslant 2\cdot\left(\frac{3}{5}n^2+\binom{n}{2}\right).$$

Po redukcji wyrazów podobnych pozostaje wykazać, że

$$n\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor \geqslant \frac{1}{5}n^2,$$

czyli $\lfloor\frac{n}{4}\rfloor \geqslant \frac{1}{5}n$. Korzystając z $n\geqslant 15$ dostajemy, że

$$\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - \frac{1}{5}n \geqslant \frac{n-3}{4} - \frac{1}{5}n = \frac{1}{20}\left(5n-15-4n\right) = \frac{(n-15)}{20} \geqslant 0.$$

W konsekwencji teza zadania jest spełniona. $\square$

12. Dana jest dodatnia liczba całkowita k. Ciąg dodatnich liczb rzeczywistych $a_1, a_2, a_3, \ldots$ spełnia równość

$$a_{n+1} = a_n + \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \qquad \text{dla wszystkich } n\geqslant k.$$

Wykazać, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita N, że

$$N^k \leqslant a_N \leqslant \left(1+\frac{1}{k}\right)^N.$$

Autor zadania: Michał Pilipczuk

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że podane nierówności spełnione są dla dostatecznie dużych N. Zajmijmy się najpierw prawą nierównością. Wybierzmy dowolną liczbę rzeczywistą $1<\alpha<1+\frac{1}{k}$. Niech

$$M = \max\left\{k, \left\lceil\frac{\alpha}{(\alpha-1)^2}\right\rceil\right\}.$$

Wybierzmy taką liczbę rzeczywistą C, aby dla $n=1,2,\ldots,M$ spełniona była nierówność

$$a_n \leqslant C\alpha^n.$$

Taka liczba rzeczywista oczywiście istnieje, wystarczy przyjąć $C = \max\limits_{n=1,2,\ldots,M}\frac{a_n}{\alpha^n}$. Udowodnijmy przez indukcję, że dla dowolnego n zachodzi nierówność $a_n\leqslant C\alpha^n$. Z doboru C wynika, że jest to prawda dla $n=1,2,\ldots,M$. Przejdźmy do dowodu kroku indukcyjnego. Niech $n\geqslant M$, mamy

$$a_{n+1} = a_n + \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \leqslant C\left(\alpha^n + \frac{\alpha^1+\alpha^2+\ldots+\alpha^n}{n}\right).$$

Wystarczy więc udowodnić, że

$$\alpha^n + \frac{\alpha^1+\alpha^2+\ldots+\alpha^n}{n} \leqslant \alpha^{n+1},$$

lub równoważnie

$$\alpha^1+\alpha^2+\ldots+\alpha^n \leqslant n\alpha^n(\alpha-1) \iff \alpha(\alpha^n-1)\leqslant n\alpha^n(\alpha-1)^2.$$

Ponieważ

$$n(\alpha-1)^2 \geqslant M(\alpha-1)^2 \geqslant \alpha,$$

to

$$n\alpha^n(\alpha-1)^2 \geqslant \alpha^{n+1} > \alpha^{n+1}-\alpha = \alpha(\alpha^n-1),$$

co kończy dowód kroku indukcyjnego. Oznacza to, że dla dowolnego n mamy $a_n \leqslant C\alpha^n$. Ponieważ $\alpha < 1+\frac{1}{k}$, to dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność

$$a_n \leqslant C\alpha^n \leqslant \left(1+\frac{1}{k}\right)^n.$$

Dowód lewej nierówności przebiega analogicznie. Niech $M = \max\left\{k, \left\lceil\left(\sqrt[k+1]{1+\frac{1}{2^{k+3}}}-1\right)^{-1}\right\rceil\right\}$. Niech C będzie taką liczbą rzeczywistą, że dla $n = 1, 2, \ldots, M$ spełniona jest nierówność

$$a_n \geqslant Cn^{k+1}.$$

Udowodnijmy przez indukcję, że dla dowolnego n zachodzi nierówność

$$a_n \geqslant Cn^{k+1}.$$

Z doboru C wynika, że jest to prawda dla $n = 1, 2, \ldots, M$. Przejdźmy do dowodu kroku indukcyjnego. Niech $n \geqslant M$, mamy

$$a_{n+1} = a_n + \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant C\left(n^{k+1} + \frac{1^{k+1} + 2^{k+1} + \ldots + n^{k+1}}{n}\right).$$

Wystarczy więc udowodnić, że

$$n^{k+1} + \frac{1^{k+1} + 2^{k+1} + \ldots + n^{k+1}}{n} \geqslant (n+1)^{k+1}.$$

Zauważmy, że

$$1^{k+1} + 2^{k+1} + \ldots + n^{k+1} > \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil^{k+1} + \ldots + n^{k+1} \geqslant \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor \cdot \frac{n^{k+1}}{2^{k+1}} \geqslant \frac{n^{k+2}}{2^{k+3}},$$

więc

$$n^{k+1} + \frac{1^{k+1} + 2^{k+1} + \ldots + n^{k+1}}{n} \geqslant n^{k+1}\left(1 + \frac{1}{2^{k+3}}\right).$$

Wystarczy udowodnić, że

$$(n+1)^{k+1} \leqslant n^{k+1}\left(1 + \frac{1}{2^{k+3}}\right)$$

lub równoważnie

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1} \leqslant \left(1 + \frac{1}{2^{k+3}}\right) \iff n \geqslant \left(\sqrt[k+1]{1+\frac{1}{2^{k+3}}} - 1\right)^{-1},$$

co jest prawdą, gdyż $n \geqslant M$. Oznacza to, że dla dowolnego n mamy $a_n \geqslant Cn^{k+1}$, więc dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność

$$a_n \geqslant Cn^{k+1} \geqslant n^k.$$

□

(db,mg)