# LXX Olimpiada Matematyczna

**Zadania konkursowe**

**zawodów stopnia drugiego**

8 lutego 2019 r. (pierwszy dzień zawodów)

**1**. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkty $K_1, K_2$ leżą wewnątrz boku $AB$, punkty $L_1, L_2$ leżą wewnątrz boku $BC$, punkty $M_1, M_2$ leżą wewnątrz boku $CD$, oraz punkty $N_1, N_2$ leżą wewnątrz boku $DA$, przy czym punkty $K_1, K_2, L_1, L_2, M_1, M_2, N_1, N_2$ są parami różne i leżą w tej kolejności na jednym okręgu $\omega$. Niech $a, b, c, d$ będą odpowiednio długościami łuków $N_2K_1, K_2L_1, L_2M_1, M_2N_1$ okręgu $\omega$, nie zawierających punktów $K_2, L_2, M_2, N_2$ odpowiednio. Wykazać, że

$$a + c = b + d.$$

**2**. Wyznaczyć wszystkie pary nieujemnych liczb całkowitych $x, y$ spełniające równość

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x+y} + \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

**3**. Niech $f(t) = t^3 + t$. Rozstrzygnąć, czy istnieją takie liczby wymierne $x, y$ oraz dodatnie liczby całkowite $m, n$, że $xy = 3$ oraz

$$\underbrace{f(f(\ldots f(f}_{m \text{ razy}}(x))\ldots)) = \underbrace{f(f(\ldots f(f}_{n \text{ razy}}(y))\ldots)).$$

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.

# LXX Olimpiada Matematyczna

**Zadania konkursowe**

**zawodów stopnia drugiego**

9 lutego 2019 r. (drugi dzień zawodów)

**4**. Dane są takie dodatnie liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geqslant 3)$, że nie istnieje liczba całkowita $m > 1$ dzieląca każdą z nich. Ponadto, jeśli oznaczymy $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, to każda z liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dzieli $s$. Udowodnić, że liczba $s^{n-2}$ jest podzielna przez $a_1 a_2 \ldots a_n$.

**5**. Dany jest ciąg $b_0, b_1, b_2, \ldots$ nieujemnych liczb całkowitych, przy czym wyrazy tego ciągu są parami różne, $b_0 = 0$ oraz $b_n < 2n$ dla każdej dodatniej liczby całkowitej $n$. Udowodnić, że dla każdej nieujemnej liczby całkowitej $m$ istnieją takie nieujemne liczby całkowite $k$ oraz $\ell$, że

$$b_k + b_\ell = m.$$

**6**. Punkt $X$ leży wewnątrz trójkąta ostrokątnego $ABC$, przy czym

$$\angle BAX = 2\angle XBA \qquad \text{oraz} \qquad \angle XAC = 2\angle ACX.$$

Punkt $M$ jest środkiem tego łuku $BC$ okręgu opisanego na trójkącie $ABC$, który zawiera punkt $A$. Dowieść, że $XM = XA$.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.