LXX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia trzeciego

3 kwietnia 2019 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Punkty X i Y leżą odpowiednio wewnątrz boków AB i AC trójkąta ostrokątnego ABC, przy czym $AX = AY$ oraz odcinek XY przechodzi przez ortocentrum trójkąta ABC. Proste styczne do okręgu opisanego na trójkącie AXY w punktach X i Y przecinają się w punkcie P. Dowieść, że punkty A, B, C, P leżą na jednym okręgu.

2. Dana jest liczba pierwsza p oraz taka liczba całkowita r, że liczba r^7-1 jest podzielna przez p. Ponadto istnieją takie liczby całkowite a oraz b, że liczby $r+1-a^2$ oraz r^2+1-b^2 są podzielne przez p. Wykazać, że istnieje taka liczba całkowita c, że liczba r^3+1-c^2 jest podzielna przez p.

3. Na przyjęciu spotkało się $n \geqslant 3$ gości, wśród których niektórzy się znają. Okazało się, że na przyjęciu nie istnieje taka czwórka różnych gości a, b, c, d, że w parach $\{a,b\}, \{b,c\}, \{c,d\}, \{d,a\}$ goście się znają, ale w parach $\{a,c\}, \{b,d\}$ goście się nie znają.

Maksymalną kliką na przyjęciu nazwiemy taki niepusty zbiór gości X (być może jednoelementowy), że goście z X się parami znają, ale nie istnieje gość spoza X znający wszystkich gości z X. Dowieść, że na przyjęciu jest co najwyżej $\frac{n(n-1)}{2}$ różnych maksymalnych klik.

Uwaga: Jeśli gość a zna gościa b, to gość b zna gościa a.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.

LXX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia trzeciego

4 kwietnia 2019 r. (drugi dzień zawodów)

4. Dane są dodatnie liczby całkowite n, k, ℓ oraz taka różnowartościowa funkcja σ o argumentach i wartościach w zbiorze $\{1,2,\ldots,n\}$, że dla każdej liczby $x \in \{1,2,\ldots,n\}$ liczba $\sigma(x)-x$ jest równa k lub $-\ell$. Dowieść, że liczba n jest podzielna przez $k+\ell$.

5. Dane są liczby dodatnie $a_0, a_1, \ldots, a_n$ spełniające warunki: a_0 jest liczbą całkowitą, $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \leqslant 1$ oraz $a_i \leqslant a_{i-1}+1$ dla wszystkich $i \in \{1,2,\ldots,n\}$. Udowodnić, że

$$n \leqslant 4a_0 \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}.$$

6. Okrąg Ω jest opisany na trójkącie ostrokątnym ABC. Punkt D jest środkiem tego łuku BC okręgu Ω, który nie zawiera punktu A. Okrąg ω o środku w punkcie D jest styczny do odcinka BC w punkcie E. Proste styczne do okręgu ω przechodzące przez punkt A przecinają prostą BC w punktach K i L, przy czym punkty B, K, L, C leżą w tej kolejności na prostej BC. Okrąg γ_1 jest styczny do odcinków AL i BL oraz do okręgu Ω w punkcie M. Okrąg γ_2 jest styczny do odcinków AK i CK oraz do okręgu Ω w punkcie N. Proste KN i LM przecinają się w punkcie P. Wykazać, że $\angle KAP = \angle EAL$.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
ptm rok zał. 1919