LXXI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego
I seria: do 30 września 2019 r.

1. Dana jest dodatnia liczba całkowita n. Rozważmy wszystkie liczby postaci $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$, gdzie k jest dodatnią liczbą całkowitą. Wykazać, że różnych takich liczb jest nie więcej niż $2\sqrt{n}+1$.

Uwaga: Dla liczby rzeczywistej x, przez $\lfloor x \rfloor$ oznaczamy największą liczbę całkowitą nie większą niż x.

2. Dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 4$ wyznaczyć wszystkie takie ciągi liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$, że

$$a_{i+1}^2 + a_{i+2}^2 + 2a_i a_{i+3} \leqslant 0 \qquad \text{dla wszystkich } i = 1, 2, \ldots, n,$$

gdzie $a_{n+t} = a_t$ dla $t \in \{1, 2, 3\}$.

3. Szachownicę o wymiarach 15×15 przykryto przy pomocy płytek o wymiarach 2×2 i 3×3 w taki sposób, że płytki nie wystają poza szachownicę i nie nachodzą na siebie oraz każde pole szachownicy jest przykryte. Wyznaczyć najmniejszą liczbę użytych płytek 3×3, dla której jest to możliwe.

4. Trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD jest wpisany w okrąg Ω. Punkt M jest środkiem tego łuku CD okręgu Ω, na którym nie leży punkt A. Niech ω będzie okręgiem o środku M stycznym do prostej AD. Punkt X jest jednym z punktów przecięcia prostej CD z okręgiem ω. Udowodnić, że prosta styczna do okręgu ω w punkcie X przechodzi przez środek odcinka AB.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

30 września 2019 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane. Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.

LXXI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego
II seria: do 30 października 2019 r.

5. Dane są dodatnie liczby całkowite $k_1, k_2, \ldots, k_n, K$, przy czym K dzieli się przez każdą z liczb $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Załóżmy, że istnieją liczby całkowite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ spełniające równanie

$$\frac{K}{k_1} \cdot x_1 + \frac{K}{k_2} \cdot x_2 + \ldots + \frac{K}{k_n} \cdot x_n = 1.$$

Udowodnić, że istnieją również takie liczby całkowite $y_1, y_2, \ldots, y_n$, że

$$\frac{K}{k_1} \cdot y_1 + \frac{K}{k_2} \cdot y_2 + \ldots + \frac{K}{k_n} \cdot y_n = 1$$

oraz $|y_i| \leqslant k_i$ dla wszystkich $i = 1, 2, \ldots, n$.

6. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 2019$. Liczby $1, 2, \ldots, n^2$ wpisano w pola tablicy o wymiarach $n \times n$ tak, że w każde pole została wpisana dokładnie jedna liczba. Udowodnić, że można wybrać n pól w taki sposób, by w każdym wierszu i w każdej kolumnie znajdowało się dokładnie jedno wybrane pole oraz wśród liczb wpisanych w wybrane pola nie było czterech będących kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

7. Ściany czworościanu $ABCD$ są trójkątami ostrokątnymi, a kąty dwuścienne przy krawędziach AB i CD są proste. Dowieść, że ortocentra trójkątów ABC, BCD, CDA, DAB leżą na jednej płaszczyźnie.

8. Wykazać, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$\frac{3+a^4+b^3+c^2}{1+2a^3+3b^2+6c} + \frac{3+b^4+c^3+a^2}{1+2b^3+3c^2+6a} + \frac{3+c^4+a^3+b^2}{1+2c^3+3a^2+6b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

30 października 2019 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane. Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.

LXXI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego
III seria: do 2 grudnia 2019 r.

9. Dane są takie liczby dodatnie a, b, że liczby $a^2 + b^2$, a^3 i b^3 są wymierne. Udowodnić, że liczby a i b również są wymierne.

10. Czworokąt $ABCD$ jest opisany na okręgu, przy czym $BC = 2AB$. Symetralna boku BC oraz dwusieczna kąta DCB przecinają się w punkcie X. Wykazać, że proste AX i BD są prostopadłe.

11. Dane są dodatnie liczby całkowite n i k. Na przyjęciu spotkało się n gości, spośród których niektórzy się znają. Okazało się, że każdy gość zna co najwyżej $2k$ innych gości, ale każdych dwóch nieznających się gości ma co najmniej k wspólnych znajomych na przyjęciu. Udowodnić, że $n \leqslant 6k$.

Uwaga: Jeśli gość A zna gościa B, to gość B zna gościa A.

12. Wszystkie liczby postaci $x^2 + y^2$, gdzie x, y są względnie pierwszymi dodatnimi liczbami całkowitymi, ustawmy w ciąg rosnący $z_1 < z_2 < z_3 < \ldots$ Przykładowo:

$$z_1 = 2 = 1^2 + 1^2,\ z_2 = 5 = 2^2 + 1^2,\ z_3 = 10 = 3^2 + 1^2,\ z_4 = 13 = 3^2 + 2^2,\ \ldots$$

Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele takich dodatnich liczb całkowitych n, że liczby $z_n, z_{n+1}, \ldots, z_{n+2019}$ są nieparzyste.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

2 grudnia 2019 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane. Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.

Adresy Komitetów Okręgowych Olimpiady Matematycznej

- Dla województwa pomorskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego,
ul. Wita Stwosza 57, 80–952 Gdańsk.
- Dla województwa śląskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego,
ul. Bankowa 14, 40-007 Katowice.
- Dla województwa małopolskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego,
ul. Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków.
- Dla województwa lubelskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Zakład Rachunku Prawdopodobieństwa pok. 810, Instytut Matematyki Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej,
pl. Marii Curie-Skłodowskiej 1, 20-031 Lublin.
- Dla województwa łódzkiego i świętokrzyskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego,
ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.
- Dla województwa wielkopolskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Adama Mickiewicza, ul. Uniwersytetu Poznańskiego 4, 61-614 Poznań .
- Dla województwa podkarpackiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyczno–Przyrodniczy,
Uniwersytetu Rzeszowskiego
ul. Pigonia 1, 35-310 Rzeszów.
- Dla województwa lubuskiego i zachodniopomorskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Szczecińskiego,
ul. Wielkopolska 15, 70-451 Szczecin.
- Dla województwa kujawsko-pomorskiego i warmińsko-mazurskiego:
— Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.
- Dla województwa mazowieckiego i podlaskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk,
ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa.
- Dla województwa dolnośląskiego i opolskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego,
pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: https://om.mimuw.edu.pl/problems/