LXXI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia drugiego

7 lutego 2020 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Załóżmy, że parami różne liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają warunek

$$(a^2+b^2-1)(a+b) = (b^2+c^2-1)(b+c) = (c^2+d^2-1)(c+d).$$

Udowodnić, że $a+b+c+d=0$.

2. Dana jest dodatnia liczba całkowita n. Jadzia ma za zadanie napisać na tablicy wszystkie liczby od 1 do $2n-1$ po kolei, przy czym każdą z nich może napisać czerwoną lub niebieską kredą. Powiemy, że para liczb $i, j \in \{1, \ldots, 2n-1\}$, gdzie $i \leqslant j$, jest *dobra*, jeśli wśród liczb $i, i+1, \ldots, j$ nieparzyście wiele zostało napisanych na tablicy na niebiesko. Wyznaczyć, w zależności od n, największą możliwą liczbę dobrych par, jaką Jadzia może uzyskać.

3. Punkt M jest środkiem boku BC trójkąta ostrokątnego ABC. Okrąg wpisany w trójkąt ABM jest styczny do boku AB w punkcie D. Okrąg wpisany w trójkąt ACM jest styczny do boku AC w punkcie E. Punkt F jest taki, że czworokąt $DMEF$ jest równoległobokiem. Udowodnić, że punkt F leży na prostej zawierającej dwusieczną kąta BAC.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.

LXXI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia drugiego

8 lutego 2020 r. (drugi dzień zawodów)

4. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ prawdziwe są równości

$$AB = CD = EF \quad \text{oraz} \quad BC = DE = FA.$$

Wykazać, że jeśli $\sphericalangle FAB + \sphericalangle ABC = \sphericalangle FAB + \sphericalangle EFA = 240^\circ$, to $\sphericalangle FAB + \sphericalangle CDE = 240^\circ$.

5. Dana jest liczba pierwsza $p > 2$. Niech S będzie zbiorem $p+1$ liczb całkowitych. Wykazać, że istnieją parami różne liczby $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$, należące do zbioru S, dla których liczba

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + (p-1)a_{p-1}$$

jest podzielna przez p.

6. Załóżmy, że nieujemne liczby rzeczywiste $a_0, a_1, a_2, \ldots$ oraz $b_0, b_1, b_2, \ldots$ spełniają nierówności $a_i^2 \leqslant a_{i-1}a_{i+1}$ oraz $b_i^2 \leqslant b_{i-1}b_{i+1}$ dla wszystkich $i \geqslant 1$. Definiujemy liczby $c_0, c_1, c_2, \ldots$ wzorem

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i b_{n-i}$$

(przy czym $c_0 = a_0 b_0$). Wykazać, że dla wszystkich $k \geqslant 1$ prawdziwa jest nierówność $c_k^2 \leqslant c_{k-1}c_{k+1}$.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.