LXXI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

7 lutego 2020 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Załóżmy, że parami różne liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają warunek

$$(a^2+b^2-1)(a+b)=(b^2+c^2-1)(b+c)=(c^2+d^2-1)(c+d).$$

Udowodnić, że $a+b+c+d=0$.

Autor zadania: Piotr Nayar

Rozwiązanie:

Mamy

$$\begin{aligned}0&=(a^2+b^2-1)(a+b)-(b^2+c^2-1)(b+c)=\\&=(a-c)(b^2-1)+a^2(a+b)-c^2(b+c)=\\&=(a-c)(b^2-1+(a^2+ac+c^2)+b(a+c))\\&=(a-c)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca-1).\end{aligned}$$

Ponieważ, liczby a i c są różne, to

(1) $$a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca-1=0.$$

Podobnie, ponieważ liczby b i d są różne, to z równości

$$\begin{aligned}0&=(b^2+c^2-1)(b+c)-(c^2+d^2-1)(c+d)\\&=(b-d)(c^2-1)+b^2(b+c)-d^2(c+d)=\\&=(b-d)(c^2-1+(b^2+bd+d^2)+c(b+d))\\&=(b-d)(b^2+c^2+d^2+bc+cd+db-1)\end{aligned}$$

wynika, że

(2) $$b^2+c^2+d^2+bc+cd+db-1=0.$$

Odejmując stronami równania (1) i (2) dostajemy, że

$$0=a^2+ab+ac-d^2-bd-cd=(a-d)(a+b+c+d).$$

Ponieważ liczby a i d są różne, to otrzymujemy tezę. $\square$

Sposób II

Równość $(a^2+b^2-1)(a+b)=(b^2+c^2-1)(b+c)$ możemy potraktować jako równanie z niewiadomą a i z parametrami b, c. Oczywistym pierwiastkiem tego równania jest c, a to oznacza, że wielomian $(a^2+b^2-1)(a+b)-(b^2+c^2-1)(b+c)$ dzieli się przez $a-c$. Podzieliwszy otrzymujemy

$$\begin{aligned}0&=(a^2+b^2-1)(a+b)-(b^2+c^2-1)(b+c)=\\&=(a-c)(a^2+a(b+c)+b^2+bc+c^2-1).\end{aligned}$$

Podobnie z założenia $(c^2+d^2-1)(c+d)=(b^2+c^2-1)(b+c)$ wynika równość

$$\begin{aligned}0&=(d^2+c^2-1)(d+c)-(b^2+c^2-1)(b+c)=\\&=(d-b)(d^2+d(b+c)+b^2+bc+c^2-1).\end{aligned}$$

Ponieważ $a\neq c$ i $d\neq b$, więc liczby a i d są różnymi pierwiastkami równania $x^2+x(b+c)+b^2+bc+c^2-1=0$. Z wzoru Viète'a wynika, że $a+d=-(b+c)$ czyli $a+b+c+d=0$. Zakończyliśmy dowód. $\square$

Uwaga. Drugi sposób pojawił się w rozwiązaniach uczestników drugiego stopnia OM w kliku różnych wersjach. Pierwszy – rozwiązanie firmowe – też.

2. Dana jest dodatnia liczba całkowita n. Jadzia ma za zadanie napisać na tablicy wszystkie liczby od 1 do $2n-1$ po kolei, przy czym każdą z nich może napisać czerwoną lub niebieską kredą. Powiemy, że para liczb $i, j \in \{1, \ldots, 2n-1\}$, gdzie $i \leqslant j$, jest *dobra*, jeśli wśród liczb $i, i+1, \ldots, j$ nieparzyście wiele zostało napisanych na tablicy na niebiesko. Wyznaczyć, w zależności od n, największą możliwą liczbę dobrych par, jaką Jadzia może uzyskać.

Autor zadania: Łukasz Bożyk

Rozwiązanie:

Odpowiedź: n^2.

Jeżeli Jadzia pomaluje każdą liczbę na niebiesko, to para (i, j) jest dobra wtedy i tylko wtedy, gdy $j-i$ jest liczbą parzystą. Zauważmy, że przy ustalonym $j-i=k$ liczbę i można wybrać dowolnie spośród liczb $1, 2, \ldots, 2n-1-k$. Oznacza to, że liczba dobrych par jest równa

$$(2n-1-0)+(2n-1-2)+\ldots+(2n-1-2(n-1))=n\left(\frac{(2n-1)+1}{2}\right)=n^2.$$

Udowodnimy teraz, że większej liczby dobrych par nie da się uzyskać. Dla $i=1, 2, \ldots, 2n-1$ niech s_i oznacza liczbę niebieskich liczb wśród liczb $1, 2, \ldots, i$. Ponadto przyjmijmy $s_0=0$. Dla dowolnych i, j liczba niebieskich liczb pośród $i, i+1, \ldots, j$ jest równa $s_j - s_{i-1}$. Zatem para (i, j) jest dobra wtedy i tylko wtedy, gdy $s_j - s_{i-1}$ jest liczbą nieparzystą, lub równoważnie liczby s_{i-1} i s_j są różnej parzystości.

Oznaczmy przez p liczbę liczb parzystych pośród $s_1, s_2, \ldots, s_{2n-1}$. Wówczas wśród liczb $s_0, s_1, \ldots, s_{2n-1}$ jest $p+1$ liczb parzystych oraz $2n-1-p$ liczb nieparzystych. Liczba par liczb s_{i-1}, s_j o różnej parzystości jest równa

$$(p+1)(2n-1-p) \leqslant \left(\frac{p+1+2n-1-p}{2}\right)^2 = n^2,$$

więc liczba dobrych par jest nie większa od n^2. □

3. Punkt M jest środkiem boku BC trójkąta ostrokątnego ABC. Okrąg wpisany w trójkąt ABM jest styczny do boku AB w punkcie D. Okrąg wpisany w trójkąt ACM jest styczny do boku AC w punkcie E. Punkt F jest taki, że czworokąt $DMEF$ jest równoległobokiem. Udowodnić, że punkt F leży na dwusiecznej kąta BAC.

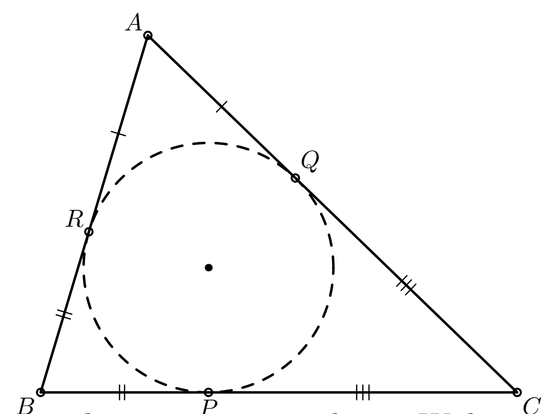
Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Sposób I

Rozpatrzmy dowolny trójkąt $A'B'C'$ którego okrąg wpisany jest styczny do boków $B'C'$, $C'A'$ i $A'B'$ w punktach P, Q i R odpowiednio. Wówczas na podstawie twierdzenia o równości odcinków stycznych wiemy, że $A'R = A'Q := x$, $B'R = B'P := y$ oraz $C'P = C'Q := z$. Mamy więc $x+y = A'B'$, $y+z = B'C'$ oraz $z+x = C'A'$. Dodając te równości stronami, następnie dzieląc wynik przez 2 otrzymujemy $x+y+z = \frac{1}{2}(A'B' + B'C' + C'A')$. Wobec tego prawdziwy jest wzór

(3) $$A'R = (x+y+z) - (y+z) = \frac{1}{2}(A'B' + A'C' - B'C').$$



Przejdźmy teraz do rozwiązania zadania. Wykażemy najpierw, że $AM > \frac{1}{2}BC$. Przeprowadzimy rozumowanie nie wprost: załóżmy, że $AM \leqslant \frac{1}{2}BC$. Wówczas $AM \leqslant BM$, skąd $\sphericalangle MBA \leqslant \sphericalangle BAM$. Podobnie, $AM \leqslant CM$, więc $\sphericalangle ACM \leqslant \sphericalangle MAC$. Wnioskujemy, że

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle BAM + \sphericalangle MAC \geqslant \sphericalangle MBA + \sphericalangle ACM = 180^\circ - \sphericalangle BAC.$$

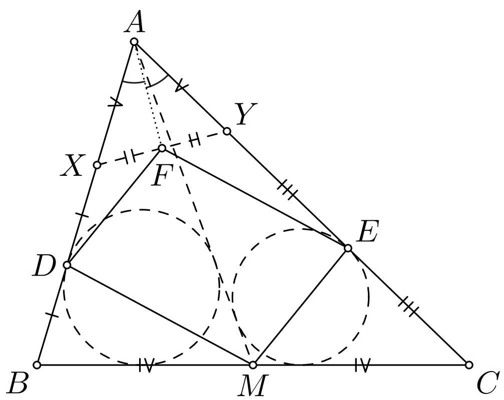
Jednakże nierówność ta nie może być spełniona, gdyż kąt BAC jest ostry na mocy założeń zadania. Otrzymana sprzeczność kończy dowód nie wprost. Zatem istotnie $AM > \frac{1}{2}BC$.

Z nierówności $AM > \frac{1}{2}BC$ oraz ze wzoru (3) wynika, że $AD > BD$ oraz $AE > EC$. W takim razie istnieją punkty X i Y na odcinkach odpowiednio AD i AE takie, że

$$BD = DX \text{ oraz } EC = EY.$$

Oznaczmy przez F' środek odcinka XY. Wówczas na podstawie twierdzenia o linii środkowej w trójkącie mamy, że $DF' \parallel BY$, $ME \parallel BY$, $DM \parallel XC$ oraz $F'E \parallel XC$. W szczególności oznacza to, że czworokąt $DMEF'$ jest równoległobokiem, a stąd $F = F'$.

Pozostaje zatem wykazać, że $AX = AY$; wtedy AF jako środkowa w trójkącie równoramiennym AXY jest również dwusieczną kąta BAC.



Korzystając dwukrotnie z (3) otrzymujemy:

$$AX = AB - 2 \cdot BD = AB - 2 \cdot \frac{AB + BM - AM}{2} =$$
$$= AM - BM = AM - MC = AC - 2 \cdot \frac{AC + MC - AM}{2} =$$
$$= AC - 2 \cdot EC = AY. \quad \square$$

Sposób II

W tym rozwiązaniu stosujemy oznaczenia: jeśli $x_1, y_1, x_2, y_2, t_1, t_2$ są dowolnymi liczbami rzeczywistymi i $X_1 = (x_1, y_1)$, $X_2 = (x_2, y_2)$, to $t_1X_1 + t_2X_2 = (t_1x_1 + t_2x_2, t_1y_1 + t_2y_2)$. Zakładamy, że punkty A, B, C leżą na płaszczyźnie, na której wybrano pewien układ współrzędnych prostokątnych. Niech a, b, c oznaczają kolejno długości odcinków BC, CA, AB, a m długość odcinka AM. Oczywiście $M = \frac{1}{2}(B + C)$. Z równości (3) z poprzedniego rozwiązania zastosowanej do trójkąta ABM wynika, że $BD = \frac{1}{2}(c + \frac{a}{2} - m)$ i $AD = \frac{1}{2}(c - \frac{a}{2} + m)$. Stąd otrzymujemy $D = \frac{AD}{AB}B + \frac{BD}{AB}A = \frac{1}{2c}\big((c - \frac{a}{2} + m)B + (c + \frac{a}{2} - m)A\big)$. W taki sam sposób otrzymujemy równość $E = \frac{1}{2b}\big((b - \frac{a}{2} + m)C + (b + \frac{a}{2} - m)A\big)$. Punkt F jest czwartym wierzchołkiem równoległoboku, którego kolejnymi wierzchołkami są D, M, E, zatem $\frac{1}{2}(D + E) = \frac{1}{2}(M + F)$ (środki przekątnych pokrywają się) i wobec tego
$F = D + E - M =$

$$= \frac{1}{2c}\Big((c - \frac{a}{2} + m)B + (c + \frac{a}{2} - m)A\Big) +$$
$$+ \frac{1}{2b}\Big((b - \frac{a}{2} + m)C + (b + \frac{a}{2} - m)A\Big) - \frac{1}{2}(B + C) =$$
$$= \frac{1}{2bc}\Big((2bc + (b + c)(\frac{a}{2} - m)\Big)A + \frac{1}{2c}(m - \frac{a}{2})B + \frac{1}{2b}(m - \frac{a}{2})C =$$
$$= A + \frac{1}{2}(m - \frac{a}{2})\Big(\frac{1}{c}(B - A) + \frac{1}{b}(C - A)\Big).$$

Przekształcamy dalej: $F - A = \frac{1}{2}(m - \frac{a}{2})\Big(\frac{B-A}{c} + \frac{C-A}{b}\Big)$. Niech $D_1 = A + \frac{1}{2}(m - \frac{a}{2})\frac{B-A}{c}$ i $E_1 = A + \frac{1}{2}(m - \frac{a}{2})\frac{C-A}{b}$. Jasne jest, że długości odcinków AD_1 i AE_1 są równe $\Big|\frac{1}{2}(m - \frac{a}{2})\Big|$, punkt D_1 leży na prostej AB, punkt E_1 leży na prostej AC, F jest środkiem odcinka D_1E_1, zatem prosta AF zawiera dwusieczną kąta D_1AE_1, więc też kąta BAC. $\square$

Uwaga 1: W drugim rozwiązaniu nie korzystamy z tego, że trójkąt jest ostrokątny. Pierwsze rozwiązanie wymagałoby wydłużenia o jedno zdanie, by uzyskać tezę również dla trójkątów nieostrokątnych.

Uwaga 2: Dodawanie punktów w drugim sposobie to standardowe postępowanie. Stosowane również w programach komputerowych używanych do „rysowania”. Poza tym jeśli potraktować pary liczb rzeczywistych jako liczby zespolone, więc utożsamić punkt (x, y), $x, y \in \mathbf{R}$ z liczbą $x + yi$, gdzie $i^2 = -1$, to takie dodawanie jest dodawaniem liczb zespolonych. Można przyjąć, że $A = (0, 0)$, więc zrezygnować z pisania A w kolejnych wzorach. Można też uznać, że mamy do czynienia z liczbami zespolonymi i że dwusieczną kąta BAC jest półprosta złożona z nieujemnych liczb rzeczywistych. To jeszcze bardziej upraszcza zapis rozwiązania. Można napisać, że $B = c\bar{z}$, $C = bz$ dla pewnej liczby zespolonej z, dla której $|z| = 1$, a litery b, c w dalszym ciągu oznaczają długości boków AC i AB trójkąta ABC. Zachęcamy do sprawdzenia, że wtedy $D = \frac{1}{2}(c - \frac{a}{2} + m)\bar{z}$, $E = \frac{1}{2}(b - \frac{a}{2} + m)z$, $M = \frac{1}{2}(bz + c\bar{z})$ i wobec tego $F = \frac{1}{2}(m - \frac{a}{2})(z + \bar{z})$, zatem $F \in \mathbf{R}$, co kończy dowód. Niektórzy uczestnicy zawodów drugiego stopnia tak właśnie zrobili skracając istotnie swe rozwiązania.

O współrzędnych barycentrycznych przeczytać można w różnych książkach, również w artykule prof. dr. hab. Marka Kordosa:
http://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/geometria/planimetria/2012/02/28/Co_moga_nam_dac_ciezary_i_wypory/

W istocie rzeczy w drugim rozwiązaniu użyliśmy współrzędnych barycentrycznych, choć nie użyliśmy tej nazwy, bo nie była istotna.

LXXI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia drugiego

8 lutego 2020 r. (drugi dzień zawodów)

4. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ prawdziwe są równości

$$AB = CD = EF \quad \text{oraz} \quad BC = DE = FA.$$

Wykazać, że jeśli $\sphericalangle FAB + \sphericalangle ABC = \sphericalangle FAB + \sphericalangle EFA = 240^\circ$, to $\sphericalangle FAB + \sphericalangle CDE = 240^\circ$.

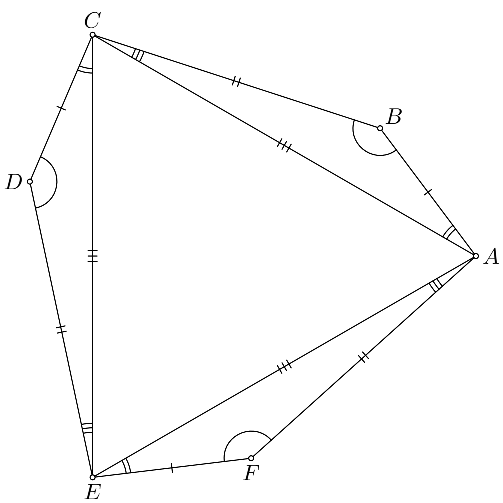
Autor zadania: Michał Kieza

Rozwiązanie:

Z danego w treści zadania warunku wynika w szczególności, że $\sphericalangle ABC = \sphericalangle EFA$. Wobec tego na podstawie cechy przystawania (bkb) trójkąty CBA i EFA są przystające, zatem $AC = EA$. Ponadto

$$\sphericalangle EAC = \sphericalangle FAB - (\sphericalangle FAE + \sphericalangle CAB) = \sphericalangle FAB - (\sphericalangle FAE + \sphericalangle AEF) =$$
$$= \sphericalangle FAB - (180^\circ - \sphericalangle EFA) = 240^\circ - 180^\circ = 60^\circ.$$

Zatem trójkąt EAC jest równoboczny, skąd $EC = EA$.



Na podstawie cechy przystawania (bbb) trójkąty DEC i EFA są przystające, czyli

$$\sphericalangle FAB + \sphericalangle CDE = (240^\circ - \sphericalangle EFA) + \sphericalangle EFA = 240^\circ. \quad \square$$

5. Dana jest liczba pierwsza $p > 2$. Niech S będzie zbiorem $p + 1$ liczb całkowitych. Wykazać, że istnieją parami różne liczby $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$, należące do zbioru S, dla których liczba

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + (p-1)a_{p-1}$$

jest podzielna przez p.

Autor zadania: Michał Kieza

Rozwiązanie:

Załóżmy, że można tak wybrać p liczb ze zbioru S, by ich suma nie była podzielna przez p. Oznaczmy te liczby przez $b_1, b_2, \ldots, b_p$. Udowodnimy, że liczby

$$\begin{aligned} c_1 &:= b_1 + 2b_2 + \ldots + (p-1)b_{p-1} + pb_p \\ c_2 &:= b_2 + 2b_3 + \ldots + (p-1)b_p + pb_1 \\ &\ldots \\ c_p &:= b_p + 2b_1 + \ldots + (p-1)b_{p-2} + pb_{p-1} \end{aligned}$$

dają parami różne reszty z dzielenia przez p. Załóżmy, że dla pewnych $i < j$ mamy $c_i \equiv c_j \pmod{p}$. Zauważmy, że dla dowolnego n mamy

$$c_n = b_n + 2b_{n+1} + \ldots + pb_{n-1} \equiv \sum_{k=1}^{p} (k - n + 1) b_k \pmod{p}.$$

Zatem

$$0 \equiv c_j - c_i \equiv \sum_{k=1}^{p} (k-j+1)b_k - (k-i+1)b_k \equiv (i-j) \sum_{k=1}^{p} b_k \pmod{p}.$$

Ponieważ $\sum_{k=1}^{p} b_k$ nie jest podzielna przez p, to $p \mid i - j$. Jednak $0 > i - j > -j \geqslant -p$, więc otrzymujemy sprzeczność. Oznacza to, że istotnie liczby $c_1, \ldots, c_p$ dają parami różne reszty z dzielenia przez p. W szczególności dla pewnego k, mamy $p \mid c_k$. Przyjmując $a_i = b_{1+((k+i-2) \bmod p)}$ dla $i = 1, 2, \ldots, p-1$ otrzymujemy tezę zadania.

Pozostaje rozważyć sytuację, w której suma dowolnych p liczb ze zbioru S jest podzielna przez p. W takim przypadku każda z liczb w zbiorze S daję tę samą resztę z dzielenia przez p co suma liczb w zbiorze S, oznaczmy tę resztę przez r. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$ będą dowolnymi liczbami ze zbioru S. Mamy

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + (p-1)a_{p-1} \equiv r(1 + 2 + \ldots + (p-1)) = \\ = r \cdot \frac{p(p-1)}{2} \equiv 0 \pmod{p}.$$

W ostatniej równości skorzystaliśmy z założenia, że $p > 2$, czyli 2 dzieli $p-1$. Wynika stąd teza. $\square$

6. Załóżmy, że nieujemne liczby rzeczywiste $a_0, a_1, a_2, \ldots$ oraz $b_0, b_1, b_2, \ldots$ spełniają nierówności $a_i^2 \leqslant a_{i-1}a_{i+1}$ oraz $b_i^2 \leqslant b_{i-1}b_{i+1}$ dla wszystkich $i \geqslant 1$. Definiujemy liczby $c_0, c_1, c_2, \ldots$ wzorem

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i b_{n-i}$$

(przy czym $c_0 = a_0 b_0$). Wykazać, że dla wszystkich $n \geqslant 1$ prawdziwa jest nierówność $c_n^2 \leqslant c_{n-1}c_{n+1}$.

Autor zadania: Piotr Nayar

Rozwiązanie:

Ciąg $d_0, d_1, d_2, \ldots$ nieujemnych liczb rzeczywistych spełniający nierówności $d_n^2 \leqslant d_{n-1}d_{n+1}$ dla $n \geqslant 1$ będziemy nazywać *dobrym* ciągiem. *Splotem* ciągów $e_0, e_1, e_2, \ldots$ i $f_0, f_1, f_2, \ldots$ nazwiemy ciąg $d_0, d_1, d_2, \ldots$ dany wzorem

$$d_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} e_i f_{n-i}$$

(przy czym $d_0 = e_0 f_0$). Udowodnimy, że splot dowolnych dwóch dobrych ciągów jest dobrym ciągiem. Wyniknie stąd teza zadania, gdyż ciąg $c_0, c_1, c_2, \ldots$ dany w treści zadania jest splotem dobrych ciągów $a_0, a_1, a_2, \ldots$ i $b_0, b_1, b_2, \ldots$.

W tym celu wystarczy udowodnić następujące stwierdzenie: dla dowolnego $n \geqslant 1$ oraz dowolnych dwóch dobrych ciągów $e_0, e_1, e_2, \ldots$ i $f_0, f_1, f_2, \ldots$ ich splot $d_0, d_1, d_2, \ldots$ spełnia nierówność $d_n^2 \leqslant d_{n-1}d_{n+1}$. Udowodnimy je przez indukcję ze względu na n.

Przyjmijmy $n = 1$ i rozważmy dowolne dwa dobre ciągi $e_0, e_1, e_2, \ldots$ i $f_0, f_1, f_2, \ldots$ oraz ich splot $d_0, d_1, d_2, \ldots$. Należy dowieść, że $d_1^2 \leqslant d_0 d_2$. Mamy $d_0 = e_0 f_0$, $d_1 = e_0 f_1 + e_1 f_0$ oraz $d_2 = e_0 f_2 + 2e_1 f_1 + e_2 f_0$, zatem

$$d_1^2 = (e_0 f_1 + e_1 f_0)^2 = e_0^2 f_1^2 + e_1^2 f_0^2 + 2e_0 e_1 f_0 f_1 \\ \leqslant e_0^2 f_0 f_2 + e_0 e_2 f_0^2 + 2e_0 e_1 f_0 f_1 = e_0 f_0 (e_0 f_2 + 2e_1 f_1 + e_2 f_0) = d_0 d_2,$$

czyli teza jest prawdziwa dla $n = 1$.

Przypuśćmy teraz, że teza zachodzi dla pewnego $n \geqslant 1$. Pokażemy, że teza zachodzi także dla $n+1$. Rozważmy dowolne dwa dobre ciągi $e_0, e_1, e_2, \ldots$ i $f_0, f_1, f_2, \ldots$ oraz ich splot $d_0, d_1, d_2, \ldots$. Należy dowieść, że $d_{n+1}^2 \leqslant d_n d_{n+2}$. Zdefiniujmy ciągi

$$g_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} e_i f_{k+1-i}, \qquad h_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} e_{i+1} f_{k-i}, \qquad k \geqslant 0,$$

przy czym zgodnie z przyjętą konwencją $g_0 = e_0 f_1$ i $h_0 = e_1 f_0$. Ciąg $g_0, g_1, g_2, \ldots$ jest splotem dobrych ciągów $e_0, e_1, e_2, \ldots$ oraz $f_1, f_2, f_3, \ldots$. Podobnie ciąg $h_0, h_1, h_2, \ldots$ jest splotem dobrych ciągów $e_1, e_2, e_3, \ldots$ oraz $f_0, f_1, f_2, \ldots$. Na mocy założenia indukcyjnego prawdziwe są zatem nierówności $g_n^2 \leqslant g_{n-1}g_{n+1}$ oraz $h_n^2 \leqslant h_{n-1}h_{n+1}$. Dla $k \geqslant 1$ i $1 \leqslant i \leqslant k-1$ mamy $\binom{k}{i} = \binom{k-1}{i} + \binom{k-1}{i-1}$, zatem

$$d_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} e_i f_{k-i} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} e_i f_{k-i} + \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} e_i f_{k-i} = \\ = g_{k-1} + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} e_{i+1} f_{k-1-i} = g_{k-1} + h_{k-1}.$$

Stąd otrzymujemy

$$d_{n+1}^2 = (g_n + h_n)^2 = g_n^2 + h_n^2 + 2g_n h_n \leqslant \\ \leqslant g_{n-1}g_{n+1} + h_{n-1}h_{n+1} + 2\sqrt{g_{n-1}g_{n+1}h_{n-1}h_{n+1}} \leqslant \\ \leqslant g_{n-1}g_{n+1} + h_{n-1}h_{n+1} + g_{n-1}h_{n+1} + g_{n+1}h_{n-1} = \\ = (g_{n-1} + h_{n-1})(g_{n+1} + h_{n+1}) = d_n d_{n+2},$$

gdzie druga nierówność to nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną, a pierwsza nierówność to użyte czterokrotnie założenie indukcyjne. $\square$

(db,mg)