LXXII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia pierwszego
1 września – 2 grudnia 2020 r.

1. Niech a, b będą liczbami rzeczywistymi. Załóżmy, że dla wszystkich liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność $|(ax + by)(ay + bx)| \leqslant x^2 + y^2$. Udowodnić, że $a^2 + b^2 \leqslant 2$.
Autor zadania: Piotr Nayar

Rozwiązanie:
Oznaczmy przez $(\star)$ nierówność

$$|(ax + by)(ay + bx)| \leqslant x^2 + y^2$$

zachodzącą dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y. Podstawiając $x = 1$ oraz $y = 1$ w $(\star)$ otrzymujemy

$$(a + b)^2 = |(a + b)(a + b)| \leqslant 1^2 + 1^2 = 2. \tag{1}$$

Natomiast podstawiając $x = 1$ oraz $y = -1$ w $(\star)$ dostajemy

$$(a - b)^2 = |(a - b)(-a + b)| \leqslant 1^2 + (-1)^2 = 2. \tag{2}$$

Dodając stronami nierówności (1) i (2) mamy

$$2(a^2 + b^2) = (a + b)^2 + (a - b)^2 \leqslant 2 + 2 = 4.$$

□

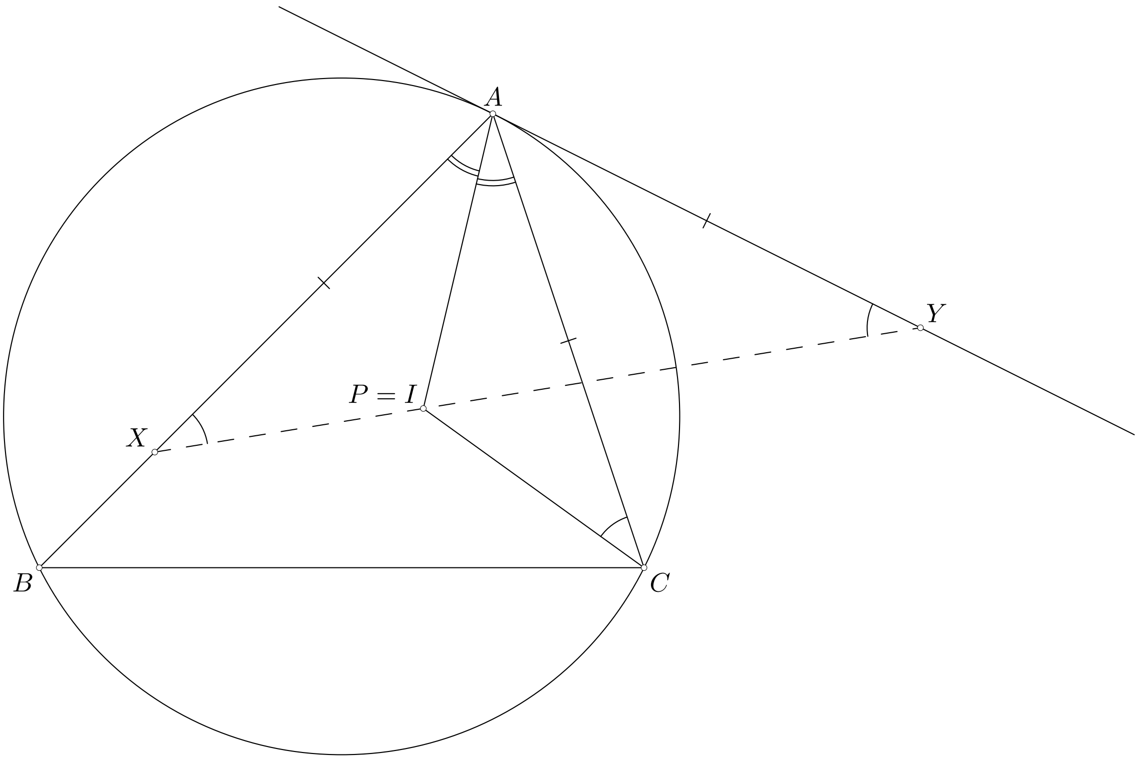
2. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB > AC$. Niech ℓ będzie prostą styczną w punkcie A do okręgu opisanego na trójkącie ABC. Punkt X leży na odcinku AB, punkt Y leży na prostej ℓ, przy czym $AX = AY = AC$ oraz punkty X i Y leżą po przeciwnych stronach prostej zawierającej dwusieczną kąta BAC. Udowodnić, że środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC leży na prostej XY.
Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:
Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC a P punktem wspólnym prostych XY i AI. Kąt między styczną a cięciwą równy jest kątowi wpisanemu opartemu na tej cięciwie, więc $180° - \sphericalangle XAY = \sphericalangle BCA$. Wobec tego

$$\sphericalangle PXA = \sphericalangle YXA = \frac{1}{2}(180° - \sphericalangle XAY) = \frac{1}{2}\sphericalangle BCA = \sphericalangle ICA,$$

gdzie w drugiej równości skorzystaliśmy z tego, że trójkąt XAY jest równoramienny.

Trójkąty PXA i ICA mają więc takie same kąty, czyli są podobne. Ponieważ $AX = AC$, więc są przystające. Wobec tego $AP = AI$, czyli $P = I$. □



3. Załóżmy, że dodatnia liczba całkowita n nie ma żadnego dzielnika d spełniającego nierówność $\sqrt{n} \leqslant d \leqslant \sqrt[3]{n^2}$. Udowodnić, że liczba n ma dzielnik $p > \sqrt[3]{n^2}$, który jest liczbą pierwszą.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Jeśli k jest dzielnikiem liczby n, to $\dfrac{n}{k}$ jest również dzielnikiem liczby n. Zatem z założeń zadania wynika, że n nie ma dzielnika w przedziale $[\sqrt[3]{n}, \sqrt[3]{n^2}]$.

Niech d będzie największym dzielnikiem liczby n spełniającym $d < \sqrt[3]{n}$. Niech p będzie dowolnym dzielnikiem pierwszym liczby $\dfrac{n}{d}$. Wtedy dp jest dzielnikiem n. Z maksymalności d mamy $dp > \sqrt[3]{n^2}$. Zatem

$$p = \frac{dp}{d} > \frac{\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{n}} = \sqrt[3]{n}.$$

Ponieważ p jest dzielnikiem n, to $p > \sqrt[3]{n^2}$, skąd p jest szukanym dzielnikiem pierwszym n. □

4. Wśród punktów płaszczyzny o obydwu współrzędnych w zbiorze $\{1, \ldots, 106\}$ niektóre punkty zaznaczono, przy czym dla każdych dwóch zaznaczonych punktów (x, y) oraz (x', y') spełniony jest co najmniej jeden z warunków:

- $x > x' - 10$ oraz $y > y' - 10$;
- $x' > x - 10$ oraz $y' > y - 10$.

Wyznaczyć największą możliwą liczbę zaznaczonych punktów.

Autor zadania: Michał Pilipczuk

Rozwiązanie:

Niech X będzie zbiorem spełniającym warunki zadania. Rozważmy zbiory

$$L_k = \{1, 2, \ldots, 106\}^2 \cap \{(x, y) : x + y = k\}, \quad \text{gdzie } k = 2, 3, \ldots, 212.$$

Weźmy dwa dowolne punkty $(x, y), (x', y') \in X \cap L_k$. Wówczas $x - x' = y' - y$, a zatem z warunków zadania $|x - x'| < 10$. Stąd natychmiast otrzymujemy, że $|X \cap L_k| \leqslant 10$ dla $k = 2, 3, \ldots, 212$.

Oczywiście $|L_k| = k-1$ dla $k \leqslant 107$ oraz $|L_k| = 213-k$ dla $k > 107$. Wobec tego

$$\begin{aligned} |X| = \sum_{k=2}^{212} |X \cap L_k| &\leqslant \sum_{k=2}^{107} \min(10, k-1) + \sum_{k=108}^{212} \min(10, 213-k) \\ &= 10 \cdot 97 + \sum_{k=2}^{10}(k-1) + 10 \cdot 96 + \sum_{k=204}^{212}(213-k) = 1930 + 2\sum_{k=1}^{9} k = 1930 + 90 = 2020. \end{aligned}$$

To oszacowanie jest optymalne, co pokazuje przykład zbioru

$$\{1, \ldots, 10\} \times \{1, \ldots, 106\} \ \cup \ \{11, \ldots, 106\} \times \{97, \ldots, 106\}.$$

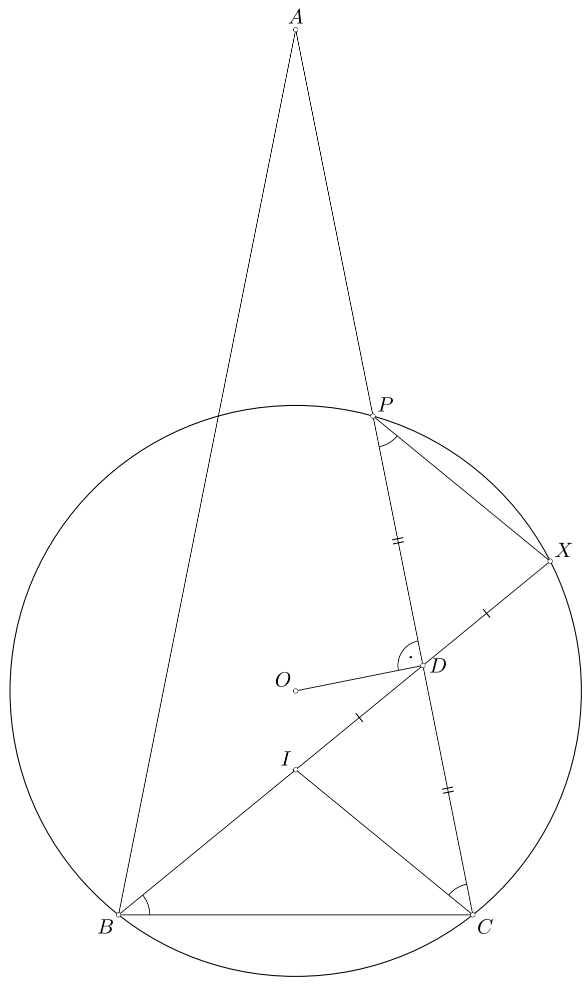
$\square$

5. Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $AB = AC$. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Prosta BI przecina bok AC w punkcie D. Punkt D jest środkiem odcinka IX. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie BCX. Udowodnić, że proste OD i AC są prostopadłe.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez ω okrąg opisany na trójkącie BCX. Punkt D leży wewnątrz ω a punkt C na okręgu ω.



Niech P będzie drugim punktem wspólnym okręgu i prostej CD. Wtedy $\sphericalangle CBX = \sphericalangle CPX$, gdyż są to kąty wsparte na tym samym łuku. Wobec tego, korzystając z równoramienności trójkąta ABC oraz faktu, że I jest punktem wspólnym dwusiecznych kątów $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle BCA$, otrzymujemy

$$\sphericalangle XPD = \sphericalangle IBC = \sphericalangle ICB = \sphericalangle ICD.$$

Ponieważ $\sphericalangle IDC = \sphericalangle XDP$, to trójkąty CDI i PDX są przystające, gdyż $ID = DX$ (cecha (bkk)). Zatem $CD = DP$, więc D jest środkiem odcinka CP.

Ostatecznie, odcinek OD łączący środek okręgu ze środkiem cięciwy, jest prostopadły do cięciwy, skąd uzyskujemy tezę $OD \perp AC$. $\square$

6. Dane są dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c, d, przy czym $a, c > 1$ i $b, d < 1$. Udowodnić, że

$$\frac{a}{ab+c+1} + \frac{b}{bc+d+1} + \frac{c}{cd+a+1} + \frac{d}{da+b+1} > 1.$$

Autor zadania: Michał Kieza

Rozwiązanie:

Z warunków zadania $a > 1$ oraz $b < 1$, więc $(a-1)(b-1) < 0$, czyli $ab + 1 < a + b$. Stąd

$$\frac{a}{ab+c+1} = \frac{a}{(ab+1)+c} > \frac{a}{a+b+c} > \frac{a}{a+b+c+d}.$$

Analogicznie dostajemy nierówności

$$\frac{b}{bc+d+1} > \frac{b}{a+b+c+d}, \quad \frac{c}{cd+a+1} > \frac{c}{a+b+c+d}, \quad \frac{d}{da+b+1} > \frac{d}{a+b+c+d}.$$

Dodając je stronami mamy

$$\frac{a}{ab+c+1} + \frac{b}{bc+d+1} + \frac{c}{cd+a+1} + \frac{d}{da+b+1} >$$
$$> \frac{a}{a+b+c+d} + \frac{b}{a+b+c+d} + \frac{c}{a+b+c+d} + \frac{d}{a+b+c+d} = \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} = 1.$$

7. W każde pole planszy 2020×2020 wpisano liczbę rzeczywistą. Spełniony jest przy tym następujący warunek: dla dowolnych czterech pól o wspólnym wierzchołku, jeśli przez a, b, c, d oznaczymy liczby wpisane w te pola jak na rysunku, to zachodzi układ równań

$$\begin{cases} a + b + 2c + 3d = 0 \\ 2a + b + 3c + 4d = 0. \end{cases}$$

a	b
c	d

Rysunek

Udowodnić, że istnieje 500 różnych pól, w które wpisano tę samą liczbę.

Autor zadania: Mariusz Skałba

Rozwiązanie:

Rozwiązując układ równań traktując b, d jako niewiadome uzyskujemy równości $b = 2a+c, d = -a-c$. Pola planszy będziemy oznaczać parami liczb (k, l), gdzie $1 \leqslant k, l \leqslant 2020$, przy czym pole $(1, 1)$ odpowiada lewemu górnemu rogowi planszy. Niech $k \leqslant 2016$ oraz $l \leqslant 2018$. Jeśli w pola (k, l) i $(k, l + 1)$ wpisano odpowiednio liczby a i c (zgodnie z rysunkiem), to w pola $(k+1, l)$ oraz $(k+1, l+1)$ wpisano odpowiednio liczby $2a+c$ oraz $-a-c$. Powtarzając to rozumowanie otrzymujemy, że w pola $(k+2, l)$ oraz $(k+2, l+1)$ wpisano odpowiednio liczby $3a + c$ oraz $-a$. Zatem pokazaliśmy, że jeśli w pole (k, l) wpisana jest liczba a, to w pole $(k + 2, l + 1)$ wpisana jest liczba $-a$.

Stosując powyższą obserwację dwukrotnie otrzymujemy, że w pole $(k + 4, l + 2)$ wpisana jest liczba a. Zatem w pola $(1 + 4j, 1 + 2j)$ dla $0 \leqslant j \leqslant 504$ wpisane są te same liczby. Wskazaliśmy zatem 505 pól, w które wpisano tę samą liczbę.

8. Dane są takie wielomiany f_1, f_2, f_3, f_4 o współczynnikach rzeczywistych, że suma dowolnych dwóch z nich nie ma pierwiastka rzeczywistego. Udowodnić, że jeśli wielomian $f_1 + f_2 + f_3 + f_4$ ma pierwiastek rzeczywisty, to co najmniej jeden z wielomianów f_1, f_2, f_3, f_4 nie ma pierwiastka rzeczywistego.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Zauważamy, że wielomian, który nie ma pierwiastka rzeczywistego, ma stały znak (czyli jest ściśle dodatni lub ściśle ujemny). Rozważmy graf pełny o wierzchołkach $1, 2, 3, 4$, którego krawędzie kolorujemy na czerwono lub niebiesko zgodnie z następującą zasadą: jeśli wielomian $f_i + f_j$ dla $i \neq j$ jest dodatni, to krawędź (i, j) kolorujemy na czerwono, a jeśli ujemny – na niebiesko.

Jeśli i, j, k, l są parami różne, to krawędzie (i, j) oraz (k, l) są pokolorowane różnymi kolorami, gdyż w przeciwnym razie funkcja $f_1 + f_2 + f_3 + f_4$ miałaby stały znak, a zatem nie miałaby pierwiastka. Łatwo zauważyć, że graf ten musi mieć następującą strukturę: istnieje wierzchołek (bez straty ogólności wierzchołek 1), z którego wychodzą trzy krawędzie jednego koloru, a pozostałe krawędzie, tworzące trójkąt, są przeciwnego koloru. Stąd znaki funkcji $f_1+f_2, f_1+f_3, f_1+f_4$ są takie same i przeciwne do znaku funkcji $f_2 + f_3, f_3 + f_4, f_4 + f_2$. Wobec tego znaki funkcji

$$(f_1 + f_2) + (f_1 + f_3) + (f_1 + f_4) = 3f_1 + f_2 + f_3 + f_4$$

oraz

$$(f_2 + f_3) + (f_3 + f_4) + (f_4 + f_2) = 2(f_2 + f_3 + f_4)$$

są przeciwne, czyli znaki funkcji $3f_1 + f_2 + f_3 + f_4$ oraz $-(f_2 + f_3 + f_4)$ są takie same. Sumując te dwie funkcje otrzymujemy, że wielomian $3f_1$ ma stały znak, a zatem nie ma pierwiastka rzeczywistego.

9. Niech $n \geqslant 2$ będzie liczbą całkowitą. Dane są liczby rzeczywiste a_{ij}, gdzie $1 \leqslant i < j \leqslant n$, przy czym dla dowolnych $x_1, \ldots, x_n \in \{-1, 1\}$ zachodzi warunek

$$\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j \ \in \ \{-1, 1\}.$$

Wyznaczyć, w zależności od n, największą możliwą liczbę takich par i, j, że $a_{ij} \neq 0$ oraz $i < j$.

Autor zadania: Piotr Nayar

Rozwiązanie:

Wykażemy, że możliwa liczba niezerowych liczb a_{ij} to 1 dla $n = 2, 3$ oraz 1 i 4 dla $n \geqslant 4$. Dla $x = (x_1, \ldots, x_n)$ niech $f(x) = \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j$. Oznaczmy $\sigma_k(x) = (x_1, \ldots, x_{k-1}, -x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$. Wtedy dla $k < l$ mamy

$$\{-4, -2, 0, 2, 4\} \ni f(x) - f(\sigma_k(x)) - f(\sigma_l(x)) + f(\sigma_l(\sigma_k(x))).$$

Z drugiej strony, oznaczając $\varepsilon_{a,bc} = -1$ dla $a \in \{b, c\}$ oraz $\varepsilon_{a,bc} = 1$ dla $a \notin \{b, c\}$, dla $k < l$ mamy

$$\begin{aligned} f(x) - f(\sigma_k(x)) - f(\sigma_l(x)) + f(\sigma_l(\sigma_k(x))) &= \sum_{i<j} a_{ij} (x_i x_j - \varepsilon_{k,ij} x_i x_j - \varepsilon_{l,ij} x_i x_j + \varepsilon_{k,ij} \varepsilon_{l,ij} x_i x_j) \\ &= \sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j (1 - \varepsilon_{k,ij})(1 - \varepsilon_{l,ij}) = 4a_{kl} x_k x_l. \end{aligned}$$

Stąd $a_{kl} \in \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$.

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} 1 &= 2^{-n} \sum_{x_1,\ldots,x_n \in \{-1,1\}} f(x)^2 = 2^{-n} \sum_{x_1,\ldots,x_n \in \{-1,1\}} \left(\sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j \right)^2 \\ &= 2^{-n} \sum_{x_1,\ldots,x_n \in \{-1,1\}} \sum_{i<j, i'<j'} a_{ij} a_{i'j'} x_i x_{i'} x_j x_{j'} = 2^{-n} \sum_{i<j, i'<j'} a_{ij} a_{i'j'} \sum_{x_1,\ldots,x_n \in \{-1,1\}} x_i x_{i'} x_j x_{j'} = \sum_{i<j} a_{ij}^2, \end{aligned}$$

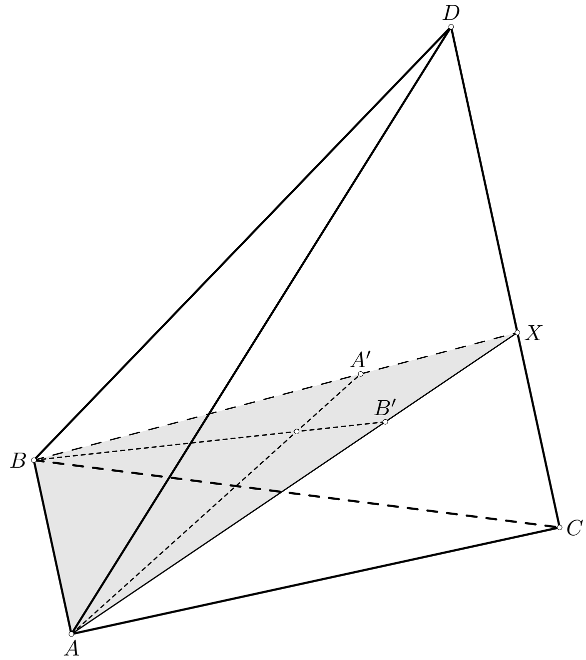
gdyż wyrażenie $\sum_{x_1,\ldots,x_n \in \{-1,1\}} x_i x_{i'} x_j x_{j'}$ dla $i < j$ oraz $i' < j'$ jest niezerowe tylko dla $i = i'$ oraz $j = j'$. Jeśli dla pewnych i, j mamy $|a_{ij}| = 1$, to pozostałe liczby a_{kl} muszą być zerowe. Przykładem takiej funkcji jest $f(x) = x_1 x_2$. W przeciwnym przypadku mamy cztery niezerowe współczynniki $\pm\frac{1}{2}$. Przykładem takiej funkcji jest $f(x) = \frac{1}{2}(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4-x_4x_1)$. Aby sprawdzić, że funkcja ta przyjmuje wartości w zbiorze $\{-1, 1\}$ zauważamy, że jeśli $x_3 = x_1$, to $f(x) = x_1 x_2$, a jeśli $x_3 = -x_1$, to $f(x) = -x_1 x_4$.

10. Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do ścian BCD, CDA, DAB i ABC odpowiednio w punktach A', B', C', D'. Udowodnić, że jeśli proste AA' i BB' przecinają się, to proste CC' i DD' także się przecinają.

Autor zadania: Michał Kieza

Rozwiązanie:

Załóżmy, że proste AA' i BB' mają punkt wspólny. Proste AA' i BB' wyznaczają więc pewną płaszczyznę, której przecięcie z krawędzią CD oznaczymy przez X.

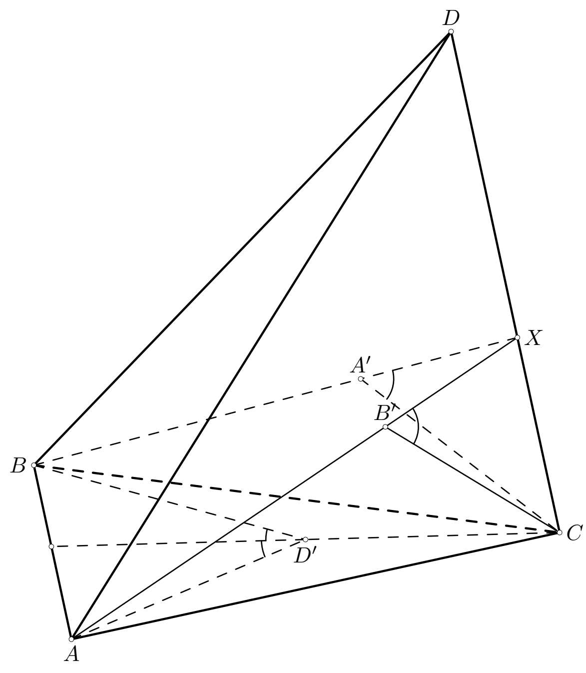


W rozwiązaniu wielokrotnie skorzystamy z następującego stwierdzenia: długości dowolnych dwóch odcinków stycznych poprowadzonych z punktu do sfery są równe.

Ze stwierdzenia wynika, że $XA' = XB'$ oraz $CA' = CB'$. Oprócz tego trójkąty XCA' oraz XCB' mają wspólny bok XC, są więc przystające na mocy cechy przystawania (bbb). W pełni analogicznie dowodzimy, że trójkąt $AB'C$ przystaje do trójkąta $AD'C$ oraz trójkąt BCA' przystaje do trójkąta BCD'. Z przystawań tych oraz z faktu, że suma kątów przyległych równa jest kątowi półpełnemu, otrzymujemy

$$\sphericalangle AD'C = \sphericalangle AB'C = 180^\circ - \sphericalangle CB'X = 180^\circ - \sphericalangle CA'X = \sphericalangle BA'C = \sphericalangle BD'C.$$

Równość ta oznacza, że prosta $D'C$ jest dwusieczną kąta płaskiego $AD'B$.

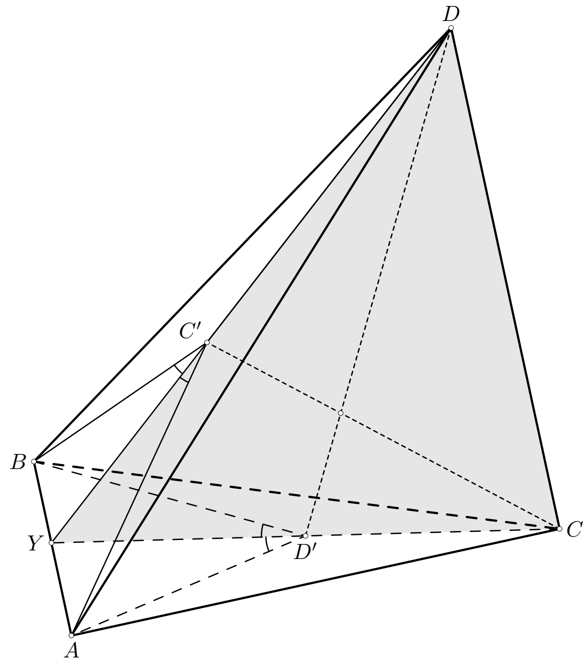


Prowadząc analogiczne rozumowanie wykazujemy, że prosta $C'D$ jest dwusieczną kąta płaskiego $AC'B$. Ponadto trójkąt $AD'B$ przystaje do trójkąta $AC'B$. Zatem dwusieczne tych dwóch trójkątów poprowadzone z wierzchołków C' i D' przecinają krawędź AB w tym samym punkcie, który oznaczymy przez Y.

Punkty C, C', D, D', Y leżą więc na jednej płaszczyźnie. W takim razie proste CC' i DD' mają punkt wspólny lub są równoległe. Druga ewentualność nie może mieć jednak miejsca, gdyż

$$\sphericalangle C'CD + \sphericalangle CDD' < \sphericalangle YCD + \sphericalangle CDY = 180^\circ - \sphericalangle CYD < 180^\circ.$$

Wykazaliśmy więc, że proste CC' i DD' przecinają się.



11. Dana jest liczba pierwsza $p \geqslant 3$. Dodatnią liczbę całkowitą n nazwiemy *ładną* wtedy i tylko wtedy, gdy suma reszt z dzielenia liczb $n, n^2, n^3, \ldots, n^{p-1}$ przez p jest równa $\frac{1}{2}p(p-1)$. Udowodnić, że w zbiorze $\{1, \ldots, p-1\}$ liczb ładnych jest nieparzyście wiele.

Autor zadania: Daniel Goc

Rozwiązanie:

Udowodnimy najpierw następujący lemat.

Lemat. Jeśli p jest liczbą pierwszą, to dla każdego $n \in \{1, \ldots, p-1\}$ istnieje dokładnie jedna liczba $m \in \{1, \ldots, p-1\}$ taka, że $nm \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$. Liczbę tę oznaczamy jako $\frac{1}{n}$.

Dowód. Dla $k = 1, \ldots, p-1$ liczby $kn (\mathrm{mod}\ p) \in \{1, \ldots, p-1\}$ są parami różne. Faktycznie, jeśli dla pewnych $k, l \in \{1, \ldots, p-1\}$ mamy $kn \equiv ln (\mathrm{mod}\ p)$, to $p | (k-l)n$, czyli $p | (k-l)$, a zatem $k = l$. Wśród rozważanych liczb istnieje zatem dokładnie jedna spełniająca $kn \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$. $\square$

Liczba 1 nie jest ładna, gdyż rozważana suma reszt jest równa $p-1$. Liczba $p-1$ jest ładna, gdyż w tym wypadku resztami są liczby $p-1, 1, p-1, \ldots, p-1, 1$, więc ich sumą jest $\frac{1}{2}p(p-1)$. Wystarczy zatem pokazać, że w zbiorze $\{2, \ldots, p-2\}$ jest parzyście wiele ładnych liczb.

Po pierwsze zauważmy, że dla $n \in \{2, \ldots, p-2\}$ ciąg reszt $n, n^2, \ldots, n^{p-1} (\mathrm{mod}\ p)$ jest permutacją ciągu reszt $\frac{1}{n}, (\frac{1}{n})^2, \ldots, (\frac{1}{n})^{p-1} (\mathrm{mod}\ p)$, gdyż zgodnie z małym twierdzeniem Fermata:

$$n^{p-1} (\mathrm{mod}\ p) = 1 = \left(\frac{1}{n}\right)^{p-1} (\mathrm{mod}\ p)$$

$$\begin{array}{ccccccc}
n (\mathrm{mod}\ p) & = & n \cdot n^{p-2} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{p-2} (\mathrm{mod}\ p) & = & n^{p-1} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{p-2} (\mathrm{mod}\ p) & = & \left(\frac{1}{n}\right)^{p-2} (\mathrm{mod}\ p) \\
n^2 (\mathrm{mod}\ p) & = & n^2 \cdot n^{p-3} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{p-3} (\mathrm{mod}\ p) & = & n^{p-1} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{p-3} (\mathrm{mod}\ p) & = & \left(\frac{1}{n}\right)^{p-3} (\mathrm{mod}\ p) \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
n^{p-2} (\mathrm{mod}\ p) & = & n^{p-2} \cdot n \cdot \frac{1}{n} (\mathrm{mod}\ p) & = & n^{p-1} \cdot \frac{1}{n} (\mathrm{mod}\ p) & = & \frac{1}{n} (\mathrm{mod}\ p).
\end{array}$$

Oznacza to, że sumy tych ciągów są sobie równe, czyli $n \in \{2, \ldots, p-2\}$ jest ładna wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{1}{n} (\mathrm{mod}\ p)$ jest ładna.

Z kolei $n = \frac{1}{n} (\text{mod } p)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $1 = n^2 (\text{mod } p)$, co jest równoważne z warunkiem $p | n^2 - 1$, czyli $p | n - 1$ (wtedy $n = 1$) lub $p | n + 1$ (wtedy $n = p - 1$). Wynika stąd, że $n \neq \frac{1}{n} (\text{mod } p)$ dla $n \in \{2, \ldots, p - 2\}$.

Z tego otrzymujemy, że liczby ładne ze zbioru $\{2, \ldots, p - 2\}$ można połączyć w pary $(n, \frac{1}{n} (\text{mod } p))$, czyli jest ich parzyście wiele. Uwzględniając 1 i $p - 1$ otrzymujemy tezę zadania.

12. Niech $A_{n,m}$ oznacza zbiór wektorów (k, l), gdzie $0 \leqslant k \leqslant n - 1$ oraz $0 \leqslant l \leqslant m - 1$ są liczbami całkowitymi. Funkcję $f : A_{n,m} \to A_{n,m}$ nazywamy *dobrą* wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są obydwa z warunków:

(1) f jest funkcją różnowartościową;

(2) jeśli $v, w \in A_{n,m}$ oraz $v + f(v) - w - f(w) = (an, bm)$ dla pewnych liczb całkowitych a i b, to $v = w$.

Wyznaczyć wszystkie pary n, m dodatnich liczb całkowitych, dla których istnieje dobra funkcja $f : A_{n,m} \to A_{n,m}$.

Autor zadania: Wojciech Nadara

Rozwiązanie:

Parę (n, m) nazwiemy *dobrą*, jeśli istnieje dobra funkcja $f \colon A_{n,m} \to A_{n,m}$. Pokażemy, że para (n, m) jest dobra wtedy i tylko wtedy, gdy $2 \mid n - m$.

Przypadek 1. $2 \nmid n - m$.

Załóżmy, że $2 \mid n$ oraz $2 \nmid m$ (przypadek $2 \nmid n$ oraz $2 \mid m$ jest analogiczny). Załóżmy, że istnieje dobra funkcja f. Sumując pierwsze współrzędne wszystkich wektorów ze zbioru $A_{n,m}$ otrzymujemy

$$m(0 + 1 + \cdots + (n-1)) = \frac{mn(n-1)}{2} \equiv \frac{n}{2} \pmod{n}.$$

Z warunku (2) tę samą sumę $(\text{mod } n)$ otrzymujemy sumując pierwsze współrzędne wektorów $f(v) + v$ dla $v \in A_{n,m}$. Z drugiej strony z punktu (1) suma ta przystaje do $2 \cdot \frac{n}{2} \equiv 0 \mod n$, co daje sprzeczność.

Przypadek 2. $2 \nmid n, m$.

Definiujemy f wzorem $f(x, y) = (x, y)$. Wtedy

$$f(x, y) + (x, y) = (2x \text{ mod}(n), 2y \text{ mod}(m))$$

jest bijekcją, gdyż n i m są nieparzyste.

Przypadek 3. $n = 2, 2 \mid m$.

Niech $m = 2l$. Definiujemy $f \colon A_{2,2l} \to A_{2,2l}$ za pomocą wzorów

$$\begin{aligned} f(0, r) &= (0, r) \\ f(1, r) &= (0, r + l) \\ f(0, r + l) &= (1, r + 1 \text{ mod}(2l)) \\ f(1, r + l) &= (1, r + l + 1 \text{ mod}(2l)) \end{aligned}$$

dla $0 \leqslant r < l$. Wówczas funkcja f jest oczywiście różnowartościowa oraz funkcja $s(v) = v + f(v)$ zadana jest wzorem

$$\begin{aligned} s(0, r) &= (0, 2r) \\ s(1, r) &= (1, 2r + l \text{ mod}(2l)) \\ s(0, r + l) &= (1, 2r + l + 1 \text{ mod}(2l)) \\ s(1, r + l) &= (0, 2r + 1) \end{aligned}$$

dla $0 \leqslant r < l$. Bez trudu sprawdzamy, że funkcja s jest bijekcją.

W dalszej części rozwiązania będzie nam potrzebny następujący lemat.

Lemat. Jeśli pary (a, b) oraz (c, d) są dobre, to również para (ac, bd) jest dobra.

Dowód. Niech f, g będą dobrymi funkcjami dla par $(a,b),(c,d)$. Niech f_1, f_2 będą odpowiednio pierwszą i drugą współrzędną f, zaś g_1, g_2 pierwszą i drugą współrzędną g, czyli $f = (f_1, f_2)$ oraz $g = (g_1, g_2)$. Każdy element $A_{ac,bd}$ może być jednoznacznie zapisany jako $(x_1 a + x_2, y_1 b + y_2)$, gdzie $0 \leqslant x_1 < c, 0 \leqslant x_2 < a, 0 \leqslant y_1 < d, 0 \leqslant y_2 < b$. Definiujemy $F : A_{ac,bd} \to A_{ac,bd}$ wzorem

$$F(x_1 a + x_2, y_1 b + y_2) = (g_1(x_1, y_1) \cdot a + f_1(x_2, y_2), g_2(x_1, y_1) \cdot b + f_2(x_2, y_2)).$$

Pokażemy, że funkcja F jest różnowartościowa. Załóżmy, że $F(x_1 a + x_2, y_1 b + y_2) = F(x_1' a + x_2', y_1' b + y_2')$. Wtedy

$$g_1(x_1, y_1) \cdot a + f_1(x_2, y_2) = g_1(x_1', y_1') \cdot a + f_1(x_2', y_2'), \quad g_2(x_1, y_1) \cdot b + f_2(x_2, y_2) = g_2(x_1', y_1') \cdot b + f_2(x_2', y_2').$$

Z jednoznaczności ilorazu i reszty z dzielenia przez a i b mamy $g_1(x_1, y_1) = g_1(x_1', y_1')$, $f_1(x_2, y_2) = f_1(x_2', y_2')$, $g_2(x_1, y_1) = g_2(x_1', y_1')$, $f_2(x_2, y_2) = f_2(x_2', y_2')$. Stąd $g(x_1, y_1) = g(x_1', y_1')$ oraz $f(x_2, y_2) = f(x_2', y_2')$ czyli $(x_1, y_1) = (x_1', y_1')$ oraz $(x_2, y_2) = (x_2', y_2')$, gdyż f i g są różnowartościowe.

Pozostało wykazać, że z równości

$$(x_1 a + x_2, y_1 b + y_2) + F(x_1 a + x_2, y_1 b + y_2) = (x_1' a + x_2', y_1' b + y_2') + F(x_1' a + x_2', y_1' b + y_2')$$

Wynikają równości $(x_1, y_1) = (x_1', y_1')$ oraz $(x_2, y_2) = (x_2', y_2')$. Mamy

$$(x_1 a + x_2) + g_1(x_1, y_1) \cdot a + f_1(x_2, y_2) = (x_1' a + x_2') + g_1(x_1', y_1') \cdot a + f_1(x_2', y_2')$$

oraz

$$(y_1 b + y_2) + g_2(x_1, y_1) \cdot b + f_2(x_2, y_2) = (y_1' b + y_2') + g_2(x_1', y_1') \cdot b + f_2(x_2', y_2').$$

Równości te można przepisać w postaci

$$(x_2 + f_1(x_2, y_2)) + a(x_1 + g_1(x_1, y_1)) = (x_2' + f_1(x_2', y_2')) + a(x_1' + g_1(x_1', y_1'))$$

oraz

$$(y_2 + f_2(x_2, y_2)) + b(y_1 + g_2(x_1, y_1)) = (y_2' + f_2(x_2', y_2')) + b(y_1' + g_2(x_1', y_1')).$$

Z jednoznaczności ilorazu i reszty z dzielenia przez a i b mamy

$$(x_2 + f_1(x_2, y_2)) \equiv (x_2' + f_1(x_2', y_2')) \pmod a$$

oraz

$$(y_2 + f_2(x_2, y_2)) \equiv (y_2' + f_2(x_2', y_2')) \pmod b.$$

Stąd $(x_2, y_2) + f(x_2, y_2) = (x_2', y_2') + f(x_2', y_2') + (ka, lb)$ dla pewnych liczb całkowitych k, l, a zatem $(x_2, y_2) = (x_2', y_2')$, gdyż f jest dobra. Wykorzystując tę wiedzę i powracając do powyższych równości otrzymujemy

$$x_1 + g_1(x_1, y_1) = x_1' + g_1(x_1', y_1'), \qquad y_1 + g_2(x_1, y_1) = y_1' + g_2(x_1', y_1'),$$

co daje $(x_1, y_1) + g(x_1, y_1) = (x_1', y_1') + g(x_1', y_1') + (ka, lb)$ dla pewnych liczb całkowitych k, l, a zatem $(x_1, y_1) = (x_1', y_1')$, gdyż g jest dobra. □

Przypadek 3. $2 \mid n, m$.

Niech $n = 2^x a, m = 2^y b$, gdzie $1 \leqslant x \leqslant y, 2 \nmid a, 2 \nmid b$. Stosując powyższy lemat wielokrotnie widzimy, że jeśli pary $(a_1, b_1), \ldots, (a_k, b_k)$ są dobre, to również para $(a_1 \ldots a_k, b_1 \ldots b_k)$ jest dobra. Stosując tę uwagę do par $\underbrace{(2,2),(2,2),\ldots,(2,2)}_{x-1}, (2, 2^{y-x+1}), (a, b)$, które są dobre (Przypadki 2 i 3), otrzymujemy, że (n, m) jest również dobra.

(db,tc,pn)