LXXII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia drugiego

12 lutego 2021 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Jacek ma n kart ponumerowanych kolejno liczbami $1, \ldots, n$, które układa na stole w rzędzie, w dowolnej wybranej przez siebie kolejności. Jacek będzie zdejmować karty ze stołu w kolejności zgodnej z numeracją kart: wpierw zdejmie kartę o numerze 1, potem kartę o numerze 2, i tak dalej. Zanim Jacek zacznie zdejmować karty, Placek pokoloruje każdą z kart na czerwono, niebiesko lub żółto. Udowodnić, że Placek może pokolorować karty w taki sposób, że podczas ich zdejmowania przez Jacka w każdym momencie spełniony będzie następujący warunek: pomiędzy dowolnymi dwiema kartami tego samego koloru znajduje się co najmniej jedna karta innej barwy.

2. Punkt P leży na boku CD równoległoboku $ABCD$, przy czym $\sphericalangle DBA = \sphericalangle CBP$. Punkt O jest środkiem okręgu przechodzącego przez punkty D i P oraz stycznego do prostej AD w punkcie D. Wykazać, że $AO = OC$.

3. Dodatnie liczby całkowite a, b, z spełniają zależność $ab = z^2 + 1$. Udowodnić, że istnieją takie dodatnie liczby całkowite x, y, że

$$\frac{a}{b} = \frac{x^2+1}{y^2+1}.$$

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).

2. Należy pisać wyłącznie na białym papierze (może być w kratkę), wyłącznie czarnym kolorem. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań. Dotyczy to również tych brudnopisów, które uczeń zamierza dołączyć do rozwiązania.

3. W przypadku konieczności odejścia od miejsca pracy trzeba powiadomić opiekuna i uzyskać jego zgodę.

4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.

5. Należy dokładnie przestrzegać zasad zawartych w pliku „Instrukcja dla uczestników 2 etapu OM.pdf” umieszczonego na stronie olimpiady.

LXXII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia drugiego

13 lutego 2021 r. (drugi dzień zawodów)

4. Dane są takie liczby rzeczywiste x, y, że $x \neq 0$, $y \neq 0$, $xy + 1 \neq 0$ oraz $x + y \neq 0$. Przypuśćmy, że liczby $x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}$ oraz $x^3 + \frac{1}{x^3} + y^3 + \frac{1}{y^3}$ są wymierne. Udowodnić, że wówczas liczba $x^2 + \frac{1}{x^2} + y^2 + \frac{1}{y^2}$ jest również wymierna.

5. Wyznaczyć największą dodatnią liczbę całkowitą n o następującej własności: na płaszczyźnie istnieją takie prostokąty $A_1, \ldots, A_n$ oraz $B_1, \ldots, B_n$, każdy o bokach równoległych do osi układu współrzędnych, że prostokąty A_i oraz B_i są rozłączne dla wszystkich $i \in \{1, \ldots, n\}$, ale prostokąty A_i oraz B_j mają punkt wspólny dla wszystkich $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$.

   Uwaga: Przez punkty należące do prostokąta rozumiemy wszystkie punkty leżące bądź w jego wnętrzu, bądź na którymkolwiek z jego boków, również jego wierzchołki.

6. Niech $p \geqslant 5$ będzie liczbą pierwszą. Rozważmy funkcję zadaną wzorem

   $$f(x_1, \ldots, x_p) = x_1 + 2x_2 + \ldots + px_p.$$

   Niech A_k oznacza zbiór wszystkich tych permutacji $(a_1, \ldots, a_p)$ zbioru $\{1, \ldots, p\}$, dla których liczba $f(a_1, \ldots, a_p) - k$ jest podzielna przez p oraz $a_i \neq i$ dla wszystkich $i \in \{1, \ldots, p\}$. Wykazać, że zbiory A_1 i A_4 mają tyle samo elementów.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).

2. Należy pisać wyłącznie na białym papierze (może być w kratkę), wyłącznie czarnym kolorem. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań. Dotyczy to również tych brudnopisów, które uczeń zamierza dołączyć do rozwiązania.

3. W przypadku konieczności odejścia od miejsca pracy trzeba powiadomić opiekuna i uzyskać jego zgodę.

4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.

5. Należy dokładnie przestrzegać zasad zawartych w pliku „Instrukcja dla uczestników 2 etapu OM.pdf” umieszczonego na stronie olimpiady.