LXXII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

12 lutego 2021 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Jacek ma n kart ponumerowanych kolejno liczbami $1, \ldots, n$, które układa na stole w rzędzie, w dowolnej wybranej przez siebie kolejności. Jacek będzie zdejmować karty ze stołu w kolejności zgodnej z numeracją kart: wpierw zdejmie kartę o numerze 1, potem kartę o numerze 2, i tak dalej. Zanim Jacek zacznie zdejmować karty, Placek koloruje każdą z kart na czerwono, niebiesko lub żółto. Udowodnić, że Placek może pokolorować karty w taki sposób, że podczas ich zdejmowania przez Jacka w każdym momencie spełniony będzie następujący warunek: pomiędzy dowolnymi dwiema kartami tego samego koloru znajduje się co najmniej jedna karta innej barwy.

Rozwiązanie:

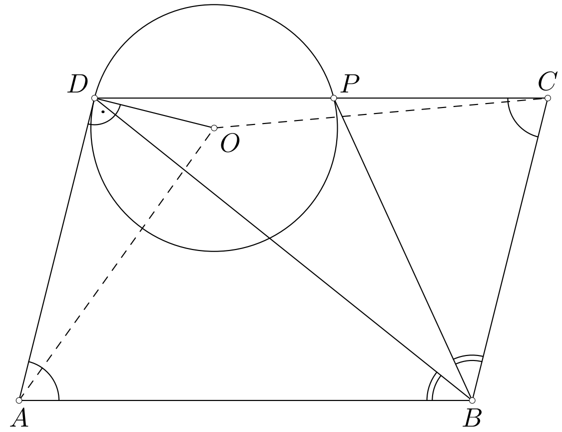
Odwracamy bieg czasu: wykładamy na stół karty, zaczynając od karty, która jako ostatnia została zdjęta ze stołu. Pierwszą wyłożoną kartę kolorujemy na dowolny kolor (na przykład na niebiesko). Każdą następną wyłożoną kartę kolorujemy zgodnie z następującą regułą:

- Jeśli wykładamy kartę na początek lub koniec rzędu, kolorujemy ją na kolor różny od koloru karty leżącej obok.
- Jeśli wykładamy kartę pomiędzy dwie karty, które leżą już na stole, kolorujemy tę kartę na kolor różny od kolorów tych dwóch kart.

Tak otrzymane kolorowanie spełnia warunki zadania. □

2. Punkt P leży na boku CD równoległoboku $ABCD$, przy czym $\sphericalangle DBA = \sphericalangle CBP$. Punkt O jest środkiem okręgu przechodzącego przez punkty D i P oraz stycznego do prostej AD w punkcie D. Wykazać, że $AO = OC$.

Rozwiązanie:



Sposób 1. Ponieważ $\sphericalangle PCB = \sphericalangle DAB$ oraz $\sphericalangle DBA = \sphericalangle CBP$, trójkąty PCB i DAB są podobne. Stąd

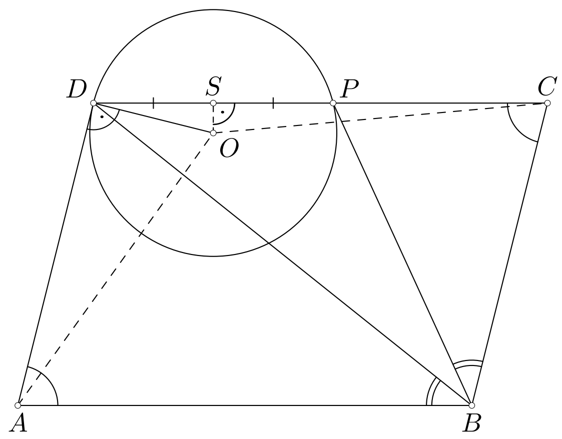
$$\frac{AD}{AB} = \frac{PC}{BC}.$$

Niech o będzie okręgiem o środku w punkcie O i promieniu $r = OD$. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa i twierdzenia o potędze punktu względem okręgu, otrzymujemy

$$AO^2 - r^2 = AD^2 = AD \cdot BC = AB \cdot PC = DC \cdot PC = OC^2 - r^2.$$

Wynika stąd, że $AO = OC$.

Sposób 2. Oznaczmy $a = AB = DC, b = AD = BC$ oraz $r = OD = OP$. Trójkąty ABD i CBP są podobne, gdyż mają takie same kąty. Wynika stąd, że $\frac{PC}{BC} = \frac{DA}{BA}$, zatem $PC = \frac{BC \cdot DA}{BA} = \frac{b^2}{a}$. Wobec tego $DP = a - \frac{b^2}{a} = \frac{a^2-b^2}{a}$. Niech S będzie środkiem odcinka DP. Odcinki OS i DP są prostopadłe. Zastosujemy kilkukrotnie twierdzenie Pitagorasa. Mamy $AO^2 = AD^2 + DO^2 = r^2 + b^2$, a zatem



$$
\begin{aligned}
OC^2 &= OS^2 + SC^2 = OD^2 - DS^2 + SC^2 \\
&= r^2 - \left(\frac{a^2-b^2}{2a}\right)^2 + \left(a - \frac{a^2-b^2}{2a}\right)^2 \\
&= r^2 - \left(\frac{a^2-b^2}{2a}\right)^2 + \left(\frac{a^2+b^2}{2a}\right)^2 = r^2 + b^2 = AO^2. \quad \square
\end{aligned}
$$

3. Dodatnie liczby całkowite a, b, z spełniają zależność $ab = z^2 + 1$. Udowodnić, że istnieją takie dodatnie liczby całkowite x, y, że

$$\frac{a}{b} = \frac{x^2+1}{y^2+1}.$$

Rozwiązanie:
Niech $x = z + a$ oraz $y = z + b$. Mamy wtedy

$$
\begin{aligned}
\frac{x^2+1}{y^2+1} &= \frac{(z+a)^2+1}{(z+b)^2+1} = \frac{z^2+1+2za+a^2}{z^2+1+2zb+b^2} = \\
&= \frac{ab+2za+a^2}{ab+2zb+b^2} = \frac{a(a+b+2z)}{b(a+b+2z)} = \frac{a}{b}.
\end{aligned}
$$

$\square$

LXXII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

13 lutego 2021 r. (drugi dzień zawodów)

4. Dane są takie liczby rzeczywiste x, y, że $x \neq 0$, $y \neq 0$, $xy + 1 \neq 0$ oraz $x + y \neq 0$. Przypuśćmy, że liczby $x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}$ oraz $x^3 + \frac{1}{x^3} + y^3 + \frac{1}{y^3}$ są wymierne. Udowodnić, że wówczas liczba $x^2 + \frac{1}{x^2} + y^2 + \frac{1}{y^2}$ jest również wymierna.

Rozwiązanie:

Niech $X = x + \dfrac{1}{x}$ oraz $Y = y + \dfrac{1}{y}$. Ponieważ

$$X^2 + Y^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + y^2 + \frac{1}{y^2} + 4,$$

wystarczy pokazać, że liczba $X^2 + Y^2$ jest wymierna. Z założenia zadania liczby $X + Y$ oraz

$$X^3 + Y^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + y^3 + \frac{1}{y^3} + 3\left(x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}\right)$$

są wymierne. Zauważmy, że

$$X + Y = (x + y)\left(1 + \frac{1}{xy}\right) = \frac{(x + y)(1 + xy)}{xy} \neq 0.$$

Liczba

$$a = \frac{X^3 + Y^3}{X + Y} = X^2 - XY + Y^2$$

jest więc wymierna. Wymierna jest również liczba $b = (X + Y)^2$. Stąd otrzymujemy wymierność liczby

$$\frac{2a + b}{3} = X^2 + Y^2.$$

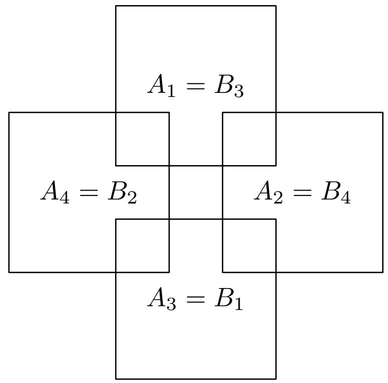
$\square$

5. Wyznaczyć największą dodatnią liczbę całkowitą n o następującej własności: na płaszczyźnie istnieją takie prostokąty $A_1, \ldots, A_n$ oraz $B_1, \ldots, B_n$, każdy o bokach równoległych do osi układu współrzędnych, że prostokąty A_i oraz B_i są rozłączne dla wszystkich $i \in \{1, \ldots, n\}$, ale prostokąty A_i oraz B_j mają punkt wspólny dla wszystkich $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$.

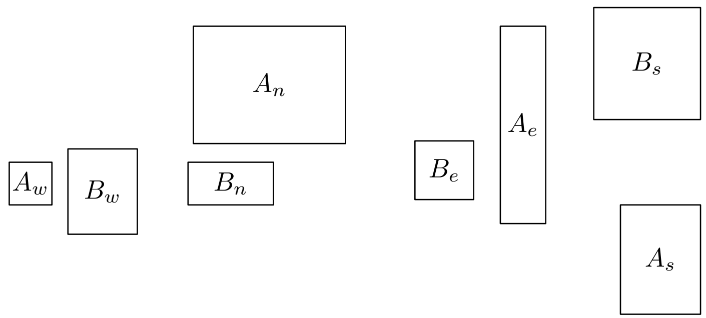
Uwaga: Przez punkty należące do prostokąta rozumiemy wszystkie punkty leżące bądź w jego wnętrzu, bądź na którymkolwiek z jego boków, również jego wierzchołki.

Rozwiązanie:

Największą liczbą spełniającą warunki zadania jest $n = 4$. Poniższy rysunek przedstawia przykład dla $n = 4$.



Przypuśćmy, że prostokąty $A_1, \ldots, A_t$ oraz $B_1, \ldots, B_t$ spełniają warunki zadania. Liczbę $i \in \{1, \ldots, t\}$ nazwiemy *zachodnią*, jeśli wszystkie punkty należące do prostokąta A_i mają ściśle mniejsze współrzędne x od wszystkich punktów należących do prostokąta B_i. Analogicznie definiujemy liczby *północne*, *wschodnie* i *południowe*.



W sytuacji przedstawionej na powyższym rysunku w jest liczbą zachodnią, n jest liczbą północną, e jest liczbą wschodnią, a s jest liczbą południową.

Zauważmy, że skoro prostokąty A_i oraz B_i są rozłączne, to każda liczba $i \in \{1, \ldots, t\}$ jest zachodnia, północna, wschodnia lub południowa (przy czym dwie z tych alternatyw mogą zajść jednocześnie). Z drugiej strony, przypuśćmy, że dwie różne liczby $i, j \in \{1, \ldots, t\}$ są jednocześnie zachodnie i rozważmy dowolne dwa punkty $(x, y) \in A_i \cap B_j$ oraz $(x', y') \in A_j \cap B_i$. Zachodniość liczby i wówczas implikuje, że $x < x'$, zaś zachodniość liczby j implikuje, że $x' < x$, sprzeczność. Analogicznie dowodzimy, że istnieje co najwyżej jedna liczba północna, co najwyżej jedna wschodnia i co najwyżej jedna południowa. Wynika stąd, że $t \leqslant 4$.

6. Niech $p \geqslant 5$ będzie liczbą pierwszą. Rozważmy funkcję zadaną wzorem

$$f(x_1, \ldots, x_p) = x_1 + 2x_2 + \ldots + px_p.$$

Niech A_k oznacza zbiór tych permutacji $(a_1, \ldots, a_p)$ zbioru $\{1, \ldots, p\}$, dla których liczba $f(a_1, \ldots, a_p) - k$ jest podzielna przez p oraz $a_i \neq i$ dla wszystkich $i \in \{1, \ldots, p\}$. Wykazać, że zbiory A_1 i A_4 mają tyle samo elementów.

Rozwiązanie:

W poniższym rozwiązaniu wszystkie przystawania rozważane są modulo p. Oznaczmy $[p] = \{1, 2, \ldots, p\}$. Zdefiniujmy funkcję $\sigma\colon [p] \to [p]$ wzorem

$$\sigma(i) = \begin{cases} 2i & \text{dla } i = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2} \\ 2i - p & \text{dla } i = \frac{p+1}{2}, \frac{p+3}{2}, \ldots, p. \end{cases}$$

Wprost z określenia funkcji σ wynika, że jest ona bijekcją oraz że $\sigma(i) \equiv 2i$ dla każdego $i \in [p]$.

Rozważmy funkcję g przyporządkowującą permutacji $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ permutację

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \left(\sigma(x_{\sigma^{-1}(1)}), \sigma(x_{\sigma^{-1}(2)}), \ldots, \sigma(x_{\sigma^{-1}(p)})\right).$$

Wystarczy dowieść, że g jest bijekcją zbiorów A_1 i A_4, wyniknie stąd bowiem, że zbiory te mają tyle samo elementów.

Po pierwsze, $f(x_1, \ldots, x_p) \equiv 1$ wtedy i tylko wtedy gdy $f(g(x_1, x_2, \ldots, x_p)) \equiv 4$. Wynika to z następującego rachunku:

$$\begin{aligned} f(g(x_1, \ldots, x_p)) &= \sum_{i=1}^{p} i\sigma(x_{\sigma^{-1}(i)}) = \sum_{i=1}^{p} \sigma(i)\sigma(x_i) \equiv \sum_{i=1}^{p} (2i)(2x_i) \\ &= 4\sum_{i=1}^{p} ix_i = 4f(x_1, \ldots, x_p). \end{aligned}$$

Po drugie, permutacja $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ nie ma punktów stałych (tzn. $x_i \neq i$ dla każdego $i \in [p]$) wtedy i tylko wtedy gdy $g(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ nie ma punktów stałych. Istotnie,

$$\forall i \in [p]\ x_i \neq i \iff \forall i \in [p]\ \sigma(x_i) \neq \sigma(i) \iff \forall i \in [p]\ \sigma(x_{\sigma^{-1}(i)}) \neq i.$$

Z powyższych dwóch obserwacji wprost wynika, że $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in A_1$ wtedy i tylko wtedy gdy $g(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in A_4$. Do dokończenia rozwiązania wystarczy więc pokazać, że g jest różnowartościowa.

Rozważmy dwie różne permutacje $(x_1, x_2, \ldots, x_p), (y_1, y_2, \ldots, y_p)$. Wtedy dla pewnego indeksu i mamy $x_i \neq y_i$. Ponieważ σ jest bijekcją, $i = \sigma^{-1}(j)$ dla pewnego j. W takim razie otrzymujemy kolejno $x_{\sigma^{-1}(j)} \neq y_{\sigma^{-1}(j)}$ oraz $\sigma(x_{\sigma^{-1}(j)}) \neq \sigma(y_{\sigma^{-1}(j)})$. Stąd wniosek, że $g(x_1, x_2, \ldots, x_p) \neq g(y_1, y_2, \ldots, y_p)$, co dowodzi różnowartościowości. $\square$