LXXII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia trzeciego
7 kwietnia 2021 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Dana jest dodatnia liczba całkowita $k \geqslant 2$. Niech $p_1, p_2, \ldots, p_k$ będą k najmniejszymi liczbami pierwszymi i niech N będzie ich iloczynem. Wykazać, że w zbiorze $\{1, 2, \ldots, N\}$ dokładnie połowa elementów jest podzielna przez nieparzyście wiele spośród liczb $p_1, \ldots, p_k$.

   Przykład. Mamy $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, a zatem dla $k = 3$ jest $N = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Liczba 12 dzieli się przez 2 i przez 3, zatem jest podzielna przez parzyście wiele spośród liczb p_1, p_2, p_3.

2. Niech $n \geqslant 1$ będzie liczbą całkowitą. Dla każdej pary liczb całkowitych i, j spełniających $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ dana jest liczba rzeczywista $f(i, j)$, przy czym spełnione są warunki:

   - $f(i, i) = 0$ dla wszystkich liczb całkowitych i spełniających $0 \leqslant i \leqslant n$;
   - $0 \leqslant f(i, l) \leqslant 2\max(f(i, j), f(j, k), f(k, l))$ dla wszystkich liczb całkowitych i, j, k, l spełniających $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant k \leqslant l \leqslant n$.

   Udowodnić, że
   $$f(0, n) \leqslant 2\sum_{k=1}^{n} f(k-1, k).$$

3. Dany jest trójkąt ABC wpisany w okrąg ω. Punkt P leży na okręgu ω i jest różny od punktów A, B, C. Proste AP i BC nie są równoległe i przecinają się w punkcie D. Podobnie proste BP i AC przecinają się w punkcie E, zaś proste CP i AB przecinają się w punkcie F. Niech punkt X będzie rzutem D na prostą przechodzącą przez środki odcinków AP i BC, punkt Y rzutem E na prostą przechodzącą przez środki odcinków BP i AC, zaś punkt Z rzutem F na prostą przechodzącą przez środki odcinków CP i AB. Punkt Q jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie XYZ. Dowieść, że wszystkie punkty Q odpowiadające różnym położeniom punktu P na ω, leżą na jednym okręgu.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
rok zał. 1919 ptm

LXXII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia trzeciego

8 kwietnia 2021 r. (drugi dzień zawodów)

4. Udowodnić, że dla każdej pary dodatnich liczb rzeczywistych a, b oraz dla każdej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi nierówność

$$(a+b)^n - a^n - b^n \geqslant \frac{2^n - 2}{2^{n-2}} \cdot ab(a+b)^{n-2}.$$

5. Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$, w którym $\sphericalangle FAB + \sphericalangle BCD + \sphericalangle DEF = 360^\circ$ oraz $\sphericalangle AEB = \sphericalangle ADB$. Załóżmy, że odcinki AB i DE nie są równoległe. Wykazać, że środki okręgów opisanych na trójkątach AFE, BCD oraz punkt przecięcia prostych AB i DE leżą na jednej prostej.

6. Dana jest liczba całkowita $d \geqslant 2$ oraz okrąg ω. Jaś narysował pewną skończoną liczbę cięciw okręgu ω. Spełniony jest przy tym warunek: każdy koniec każdej narysowanej cięciwy jest końcem co najmniej d różnych narysowanych cięciw. Dowieść, że istnieje narysowana cięciwa, która przecina co najmniej $\frac{d^2}{4}$ innych narysowanych cięciw. Przyjmujemy, że cięciwy o wspólnym końcu przecinają się.

   Uwaga: Dowód, że pewna narysowana cięciwa przecina co najmniej $\frac{d^2}{8}$ innych narysowanych cięciw będzie nagradzany dwoma punktami.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.