LXXII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

7 kwietnia 2021 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Dana jest dodatnia liczba całkowita $k \geqslant 2$. Niech $p_1, p_2, \ldots, p_k$ będą k najmniejszymi liczbami pierwszymi i niech N będzie ich iloczynem. Wykazać, że w zbiorze $\{1, 2, \ldots, N\}$ dokładnie połowa elementów jest podzielna przez nieparzyście wiele spośród liczb $p_1, \ldots, p_k$.

Przykład. Mamy $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, a zatem dla $k = 3$ jest $N = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Liczba 12 dzieli się przez 2 i przez 3, zatem jest podzielna przez parzyście wiele spośród liczb p_1, p_2, p_3.

Rozwiązanie:

Niech $i \in \{1, 2, \ldots, \frac{N}{2}\}$. Zauważmy, że liczba $\frac{N}{2}$ jest nieparzysta, a zatem $2 \mid i \iff 2 \nmid \frac{N}{2} + i$. Ponadto dla $j = 2, 3, \ldots, k$ liczba p_j dzieli $\frac{N}{2}$, więc $p_j \mid i \iff p_j \mid \frac{N}{2} + i$. W takim razie liczba liczb $p_1, p_2, \ldots, p_k$ dzielących i różni się od liczby liczb $p_1, p_2, \ldots, p_k$ dzielących $\frac{N}{2} + i$ o dokładnie jeden — w takim razie jedna z liczb i, $\frac{N}{2} + i$ dzieli się przez nieparzyście wiele spośród liczb $p_1, p_2, \ldots, p_k$, a druga nie.

Wobec tego łącząc liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, N\}$ w pary postaci $i, \frac{N}{2} + i$ dla $i = 1, 2, \ldots, \frac{N}{2}$ widzimy, że dokładnie połowa z nich dzieli się przez nieparzyście wiele spośród $p_1, p_2, \ldots, p_k$. $\square$

2. Niech $n \geqslant 1$ będzie liczbą całkowitą. Dla każdej pary liczb całkowitych i, j spełniających $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ dana jest liczba rzeczywista $f(i, j)$, przy czym spełnione są warunki:

- $f(i, i) = 0$ dla wszystkich liczb całkowitych i spełniających $0 \leqslant i \leqslant n$;
- $0 \leqslant f(i, l) \leqslant 2 \max(f(i, j), f(j, k), f(k, l))$ dla wszystkich liczb całkowitych i, j, k, l spełniających $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant k \leqslant l \leqslant n$.

Udowodnić, że

$$f(0, n) \leqslant 2 \sum_{k=1}^{n} f(k-1, k).$$

Rozwiązanie:

Układ liczb $f(i, j)$ dla $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ spełniający założenia zadania będziemy nazywać *dobrym* układem. Przeprowadzimy dowód indukcyjny ze względu na n. Dla $n = 1$ należy dowieść, że $f(0, 1) \leqslant 2f(0, 1)$, co jest prawdą, gdyż $f(0, 1) \geqslant 0$ na mocy założeń zadania.

Niech $n \geqslant 2$ i załóżmy, że dla każdego $m \leqslant n - 1$ i każdego dobrego układu liczb $g(i, j)$, gdzie $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant m$ spełniona jest teza zadania. Rozważmy dobry układ $f(i, j)$, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$. Należy dowieść, że $f(0, n) \leqslant 2S$, gdzie $S = \sum_{k=1}^{n} f(k-1, k)$. Zauważmy, że z definicji S mamy $f(k-1, k) \leqslant S$ dla $1 \leqslant k \leqslant n$.

Rozważmy najpierw przypadek, gdy $f(0, 1) > \frac{S}{2}$. Wówczas

$$f(0, n) \leqslant 2 \max(f(0, 0), f(0, 1), f(1, n)) = 2 \max(f(0, 1), f(1, n)).$$

Mamy $f(0, 1) \leqslant S$. Ponadto $\sum_{k=2}^{n} f(k-1, k) = S - f(0, 1) < \frac{S}{2}$, zatem z założenia indukcyjnego zastosowanego do dobrego układu liczb $f(i + 1, j+1)$, $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n-1$ otrzymujemy $f(1, n) \leqslant 2 \cdot \sum_{k=2}^{n} f(k-1, k) < S$.

Załóżmy teraz, że $f(0, 1) \leqslant \frac{S}{2}$. Istnieje wtedy liczba $1 \leqslant \ell \leqslant n - 1$ taka, że

$$\sum_{k=1}^{\ell} f(k-1, k) \leqslant \frac{S}{2} \leqslant \sum_{k=1}^{\ell+1} f(k-1, k).$$

Wystarczy dowieść, że liczby $f(0, \ell)$, $f(\ell+1, n)$ nie przekraczają S, gdyż wówczas

$$f(0, n) \leqslant 2 \max(f(0, \ell), f(\ell, \ell + 1), f(\ell + 1, n)) \leqslant 2S.$$

Jeśli $\ell = n - 1$, wystarczy wykazać, że $f(0, n - 1) \leqslant S$. Wynika to z założenia indukcyjnego zastosowanego do dobrego układu liczb $f(i, j)$ dla $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n - 1$. Pozostaje rozważyć przypadek $1 \leqslant \ell \leqslant n - 2$. Z założenia indukcyjnego zastosowanego do dobrego układu $f(i, j)$, $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant \ell$ oraz z wyboru liczby ℓ otrzymujemy

$$f(0, \ell) \leqslant 2 \sum_{k=1}^{\ell} f(k-1, k) \leqslant S.$$

Z założenia indukcyjnego zastosowanego do dobrego układu $f(\ell + 1 + i, \ell + 1 + j)$, gdzie $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n - \ell - 1$, oraz z wyboru ℓ otrzymujemy również

$$f(\ell+1,n) \leqslant 2\sum_{k=\ell+2}^{n} f(k-1,k) = 2S - 2\sum_{k=1}^{\ell+1} f(k-1,k) \leqslant S.$$

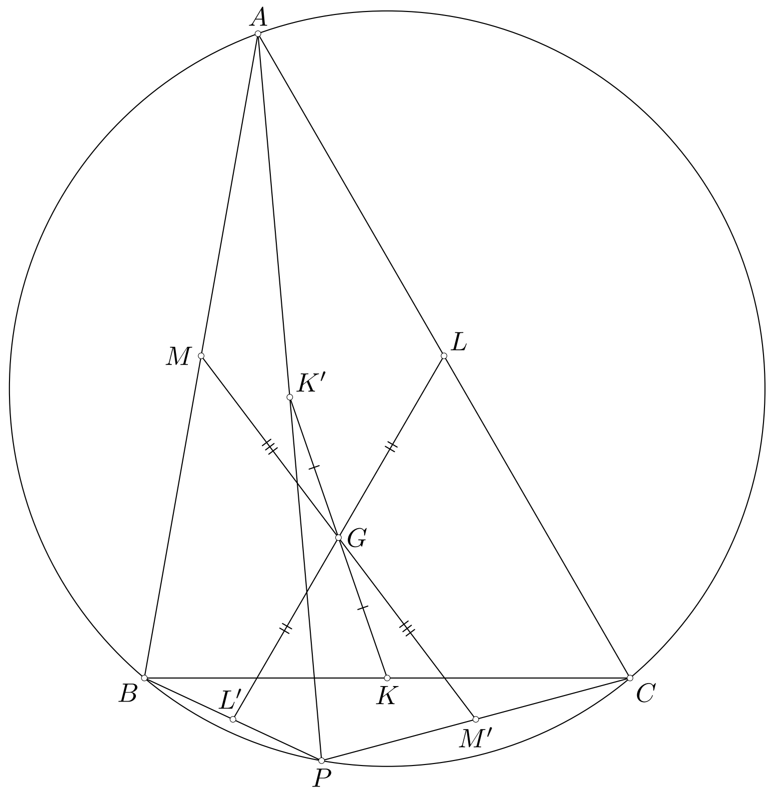
$\square$

3. Dany jest trójkąt ABC wpisany w okrąg ω. Punkt P leży na okręgu ω i jest różny od punktów A, B, C. Proste AP i BC nie są równoległe i przecinają się w punkcie D. Podobnie proste BP i AC przecinają się w punkcie E, zaś proste CP i AB przecinają się w punkcie F. Niech punkt X będzie rzutem D na prostą przechodzącą przez środki odcinków AP i BC, punkt Y rzutem E na prostą przechodzącą przez środki odcinków BP i AC, zaś punkt Z rzutem F na prostą przechodzącą przez środki odcinków CP i AB. Punkt Q jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie XYZ. Dowieść, że wszystkie punkty Q odpowiadające różnym położeniom punktu P na ω, leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie:

Oznaczmy środek okręgu ω przez O. Oznaczmy środki odcinków BC, CA, AB, AP, BP, CP przez odpowiednio K, L, M, K', L', M'. Niech G będzie takim punktem, że $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OP})$. Wówczas $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP})) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OK'})$, więc G jest środkiem odcinka KK'. Analogicznie dowodzimy, że G jest środkiem odcinków LL' i MM'.

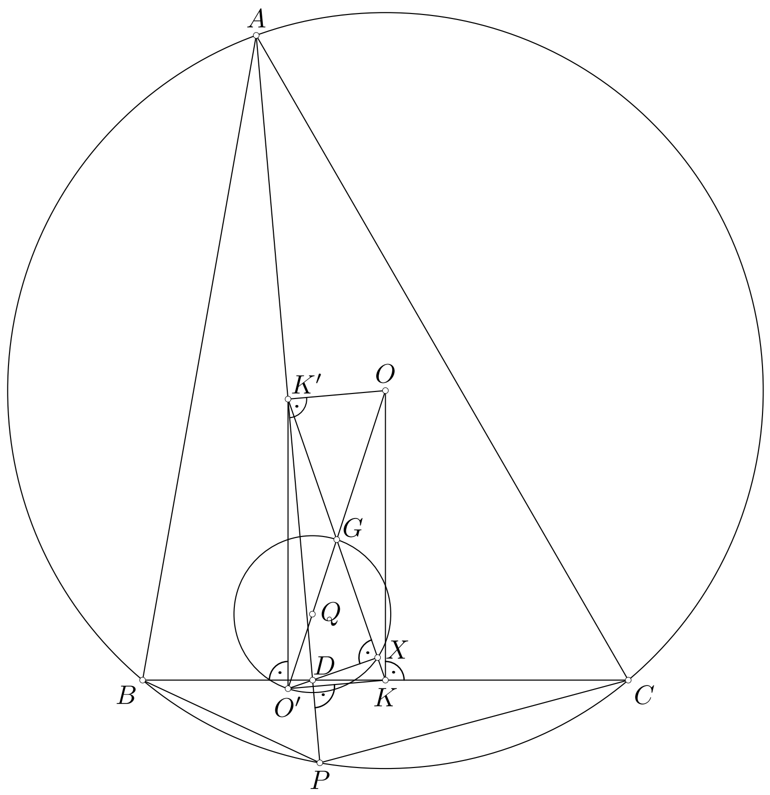
Punkt symetryczny do O względem G oznaczmy przez O'. Udowodnimy teraz, że punkt X leży na okręgu o średnicy $O'G$. Rozważmy najpierw przypadek, w którym $O = K$. Wtedy $O' = K'$ i $\sphericalangle OK'D = 90^\circ$, więc $X = O'$ i w szczególności X leży na okręgu o średnicy $O'G$. Podobnie dowodzimy, że gdy $O = K'$, to $X = O'$. Załóżmy teraz, że $O \neq K, O \neq K'$. Wówczas także $O' \neq K$, $O' \neq K'$, a czworokąt $OKO'K'$ jest równoległobokiem (zwróćmy znowuż uwagę na to, że punkty O, K, K' nie są współliniowe, gdyż wówczas byłoby $BC \perp OK = OK' \perp AP$ skąd $BC \parallel AP$ wbrew założeniom zadania). W takim razie $O'K' \parallel OK \perp BC$ i $O'K \parallel OK' \perp AP$. Stąd proste KO' i $K'O'$ są prostopadłe odpowiednio do prostych DK' i DK (o ile D nie pokrywa się z K i K'), więc O' jest ortocentrum trójkąta DKK'. Zatem rzuty punktów D, O' na KK' się pokrywają. Wnioskujemy, że w tym przypadku X leży na okręgu o średnicy $O'G$. Wreszcie, jeśli D pokrywa się z K bądź z K', to $X = D$ i w obu przypadkach $O'X \perp XG$.



Analogicznie rozumując dowodzimy, że Y i Z leżą na okręgu o średnicy $O'G$. Stąd wniosek, że Q jest środkiem $O'G$. W takim razie

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OG} = \frac{3}{4}(\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OK'}) = \frac{3}{8}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OT} + \frac{3}{8}\overrightarrow{OP},$$

przy czym T jest takim punktem płaszczyzny, że $\overrightarrow{OT} = \frac{3}{8}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA})$. Wobec tego $\overrightarrow{TQ} = \frac{3}{8}\overrightarrow{OP}$, w szczególności $TQ = \frac{3}{8}R$, gdzie R jest promieniem okręgu ω. Punkt Q leży więc na okręgu o środku T i promieniu $\frac{3}{8}R$.


A
K′
O
G
Q
X
D
B
O′
K
C
P

□

LXXII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia trzeciego
8 kwietnia 2021 r. (drugi dzień zawodów)

4. Udowodnić, że dla każdej pary dodatnich liczb rzeczywistych a, b oraz dla każdej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi nierówność

$$(a+b)^n - a^n - b^n \geqslant \frac{2^n-2}{2^{n-2}} \cdot ab(a+b)^{n-2}.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny ze względu na n. Dla $n=1$ obie strony nierówności są równe 0, dla $n=2$ obie strony nierówności są równe $2ab$, a dla $n=3$ obie strony nierówności są równe $3ab(a+b)$.

Ustalmy $a, b > 0$ i załóżmy, że dla pewnego $n \geqslant 3$ mamy

$$(a+b)^n - a^n - b^n \geqslant \frac{2^n-2}{2^{n-2}} \cdot ab(a+b)^{n-2}.$$

Mnożąc tę nierówność stronami przez liczbę dodatnią $a+b$ otrzymujemy

$$(a+b)^{n+1} - a^{n+1} - b^{n+1} - ab(a^{n-1}+b^{n-1}) \geqslant \frac{2^n-2}{2^{n-2}} \cdot ab(a+b)^{n-1}.$$

Wobec tego

$$(a+b)^{n+1} - a^{n+1} - b^{n+1} \geqslant ab(a^{n-1}+b^{n-1}) + \frac{2^n-2}{2^{n-2}} \cdot ab(a+b)^{n-1}.$$

Aby zakończyć dowód indukcyjny wystarczy sprawdzić, że

$$ab(a^{n-1}+b^{n-1}) + \frac{2^n-2}{2^{n-2}} \cdot ab(a+b)^{n-1} \geqslant \frac{2^{n+1}-2}{2^{n-1}} \cdot ab(a+b)^{n-1}.$$

Odejmując od obu stron liczbę $\frac{2^n-2}{2^{n-2}} \cdot ab(a+b)^{n-1}$ otrzymujemy równoważną postać

$$ab(a^{n-1}+b^{n-1}) \geqslant \left(\frac{2^{n+1}-2}{2^{n-1}} - \frac{2^n-2}{2^{n-2}}\right) \cdot ab(a+b)^{n-1} = \frac{ab(a+b)^{n-1}}{2^{n-2}}.$$

Dzieląc obie strony nierówności przez liczbę dodatnią $2ab$ a następnie wyciągając pierwiastek stopnia $n-1$ otrzymujemy równoważnie

$$\sqrt[n-1]{\frac{a^{n-1}+b^{n-1}}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2}.$$

Ta nierówność jest prawdziwa — jest to nierówność między średnią potęgową stopnia $n-1$ i średnią arytmetyczną. □

5. Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$, w którym $\sphericalangle FAB + \sphericalangle BCD + \sphericalangle DEF = 360^\circ$ oraz $\sphericalangle AEB = \sphericalangle ADB$. Załóżmy, że odcinki AB i DE nie są równoległe. Wykazać, że środki okręgów opisanych na trójkątach AFE, BCD i punkt przecięcia prostych AB i DE leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie:

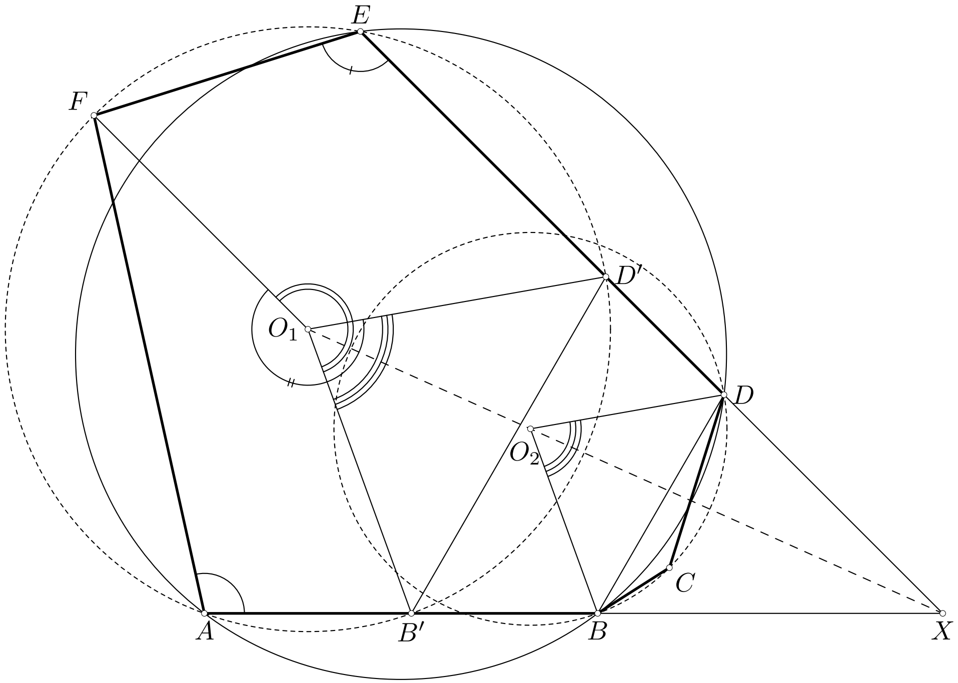
W niniejszym rozwiązaniu przyjmujemy następującą konwencję: $\sphericalangle KLM$ oznacza *kąt skierowany*, czyli kąt o jaki należy obrócić półprostą LK wokół punktu L przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara tak, by nałożyła się ona na półprostą LM. Rachunki na kątach wykonujemy z dokładnością do wielokrotności 360°. (Tak więc na przykład $\sphericalangle KLM = 360^\circ - \sphericalangle MLK = -\sphericalangle MLK$.)

Niech X będzie punktem przecięcia prostych AB i DE. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że punkty B, D leżą na odcinkach odpowiednio AX, EX.

Oznaczmy okrąg opisany na trójkącie EFA przez ω. Niech B' będzie takim punktem leżącym na prostej XA, że $\sphericalangle XB'E = \sphericalangle AFE$. Wówczas B' leży na ω. Podobnie, gdy D' jest takim punktem leżącym na prostej XE, że $\sphericalangle AD'X = \sphericalangle AFE$, to D' leży na ω. Zauważmy, że skoro $\sphericalangle ADB = \sphericalangle AEB$ oraz punkty D, E leżą po tej samej stronie prostej AB, to punkty A, B, D, E leżą na jednym okręgu. Wobec tego $\sphericalangle XBD = \sphericalangle AEX = \sphericalangle XB'D'$, co oznacza, że $BD \parallel B'D'$.

Niech O_1 będzie środkiem ω, a O_2 środkiem okręgu opisanego na trójkącie BCD. Mamy

$$\begin{aligned}\sphericalangle B'O_1D' &= \sphericalangle B'O_1F + \sphericalangle FO_1D' = 2\sphericalangle XAF + 2\sphericalangle FEX = \\ &= 2(360^\circ - \sphericalangle DCB) = 2\sphericalangle BCD = \sphericalangle BO_2D.\end{aligned}$$



Wobec tego trójkąty równoramienne $B'O_1D'$ i BO_2D są podobne, a skoro ich odpowiadające sobie boki $B'D'$ i BD są równoległe, to trójkąty te albo są jednokładne albo jeden z nich powstaje z drugiego przez przesunięcie o niezerowy wektor albo się pokrywają. W pierwszym przypadku proste O_1O_2, BB', DD' przecinają się w środku jednokładności przekształcającej jeden trójkąt na drugi, skąd dostajemy tezę. Drugi przypadek nie może zajść, bo wtedy proste BB', DD' byłyby równoległe, a wiemy, że nie są, bo przecinają się w punkcie X. W trzecim przypadku O_1 pokrywa się z O_2 i teza zadania jest oczywista. $\square$

6. Dana jest liczba całkowita $d \geqslant 2$ oraz okrąg ω. Jaś narysował pewną skończoną liczbę cięciw okręgu ω. Spełniony jest przy tym warunek: każdy koniec każdej narysowanej cięciwy jest końcem co najmniej d różnych narysowanych cięciw. Dowieść, że istnieje narysowana cięciwa, która przecina co najmniej $\frac{d^2}{4}$ innych narysowanych cięciw. Przyjmujemy, że cięciwy o wspólnym końcu przecinają się.

Uwaga: Dowód, że pewna narysowana cięciwa przecina co najmniej $\frac{d^2}{8}$ innych narysowanych cięciw będzie nagradzany dwoma punktami.

Rozwiązanie:

Oznaczmy końce cięciw narysowanych przez Jasia przez $A_1, A_2, \ldots, A_t$, przy czym numerację dobieramy tak, że $A_1, A_2, \ldots, A_t$ leżą w tej kolejności na okręgu ω.

Dla każdej cięciwy A_iA_j definiujemy jej *długość*, jako $|i-j|$. Spośród wszystkich narysowanych cięciw długości większej od $\frac{d}{2}$ rozważmy tę cięciwę, która ma najmniejszą długość (jeśli jest kilka takich, rozważamy dowolną z nich). Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że jest to cięciwa A_kA_ℓ, przy czym $1 \leqslant k < \ell \leqslant t$. Wykażemy, że A_kA_ℓ przecina więcej niż $\frac{d^2}{4}$ innych narysowanych cięciw.

Rozważmy punkt A_m, przy czym $k+1 \leqslant m \leqslant \ell-1$ i rozważmy cięciwę A_mA_{m+n}, która nie przecina A_kA_ℓ. Wówczas $k+1 \leqslant m+n \leqslant \ell-1$ oraz $n \neq 0$, a ponadto $-\frac{d}{2} \leqslant n \leqslant \frac{d}{2}$, gdyż w przeciwnym razie cięciwa A_mA_{m+n} miałaby długość większą od $\frac{d}{2}$ i mniejszą od $\ell-k$, wbrew wyborowi cięciwy A_kA_ℓ. W takim razie $-\min(m-k-1, \lfloor\frac{d}{2}\rfloor) \leqslant n \leqslant \min(\ell-1-m, \lfloor\frac{d}{2}\rfloor)$. Stąd wniosek, że jest co najwyżej $\min(m-k-1, \lfloor\frac{d}{2}\rfloor)+\min(\ell-1-m, \lfloor\frac{d}{2}\rfloor)$ cięciw o końcu A_m, które nie przecinają A_kA_ℓ. W takim razie co najmniej $d-\min(m-k-1, \lfloor\frac{d}{2}\rfloor)-\min(\ell-1-m, \lfloor\frac{d}{2}\rfloor)$ cięciw o końcu A_m przecina A_kA_ℓ. Ponadto A_kA_ℓ ma wspólny koniec A_k z co najmniej $d-1$ cięciwami spośród których co najwyżej $\lfloor\frac{d}{2}\rfloor$ jest postaci A_kA_m dla $k+1 \leqslant m \leqslant \ell-1$ oraz wspólny koniec A_ℓ z co najmniej $d-1$ innymi cięciwami, spośród których co najwyżej $\lfloor\frac{d}{2}\rfloor$ jest postaci A_mA_ℓ dla $k+1 \leqslant m \leqslant \ell-1$.

Podsumowując, liczba cięciw przecinających A_kA_ℓ wynosi co najmniej

$$2(d-1-\left\lfloor\frac{d}{2}\right\rfloor)+\sum_{m=k+1}^{\ell-1}\left(d-\min(m-k-1,\left\lfloor\frac{d}{2}\right\rfloor)-\min(\ell-1-m,\left\lfloor\frac{d}{2}\right\rfloor)\right)$$
$$=(\ell-k)(d-2\left\lfloor\frac{d}{2}\right\rfloor)+\left\lfloor\frac{d}{2}\right\rfloor^2+\left\lfloor\frac{d}{2}\right\rfloor+d-2$$
$$\geqslant(\left\lfloor\frac{d}{2}\right\rfloor+1)(d-2\left\lfloor\frac{d}{2}\right\rfloor)+\left\lfloor\frac{d}{2}\right\rfloor^2+\left\lfloor\frac{d}{2}\right\rfloor+d-2$$
$$=\begin{cases}\frac{d^2}{4}+\frac{3d}{2}-2 & \text{jeśli } 2 \mid d,\\ \frac{d^2}{4}+\frac{3d}{2}-\frac{7}{4} & \text{jeśli } 2 \nmid d.\end{cases}$$

W obu przypadkach otrzymana liczba jest większa od $\frac{d^2}{4}$. $\square$

Uwaga. Otrzymane wyżej szacowania są najlepsze możliwe, o czym świadczy przykład $d+1$ punktów na okręgu połączonych wszystkimi możliwymi cięciwami.

Uwaga. Istnienie cięciwy, która przecina się z więcej niż $\frac{d^2}{8}$ cięciwami można uzasadnić podobną metodą w sposób następujący. Spośród wszystkich cięciw długości większej od $\frac{d}{4}$ wybierzmy jedną z tych o najmniejszej długości. Niech będzie to cięciwa A_kA_ℓ, przy czym $k<\ell$. Dla każdego $k+1 \leqslant m \leqslant \ell-1$ istnieje co najwyżej $\frac{d}{2}$ cięciw o końcu A_m nieprzecinających A_kA_ℓ (jedynymi potencjalnymi kandydatami na takie cięciwy są A_mA_{m+n}, gdzie $-\frac{d}{4} \leqslant n \leqslant \frac{d}{4}$ i $n \neq 0$). Pozostałe cięciwy o końcu A_m muszą przecinać A_kA_ℓ. Takich cięciw jest co najmniej $d-\frac{d}{2}=\frac{d}{2}$. W takim razie liczba cięciw przecinających A_kA_ℓ mających jeden koniec wśród wierzchołków $A_{k+1}, A_{k+2}, \ldots, A_{\ell-1}$ to co najmniej $(\ell-k-1)\cdot\frac{d}{2}$. Oprócz tego jest co najmniej $d-(\ell-k)$ cięciw o końcu A_k, których nie uwzględniliśmy w powyższym zliczaniu — razem otrzymujemy więc co najmniej

$$(\ell-k-1)\cdot\frac{d}{2}+d-(\ell-k)=(\ell-k)(\frac{d}{2}-1)+\frac{d}{2}>\frac{d}{4}\cdot(\frac{d}{2}-1)+\frac{d}{2}>\frac{d^2}{8}$$

cięciw przecinających A_kA_ℓ.