LXXIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego
I seria: do 15 października 2021 r.

1. Niech a, b będą liczbami rzeczywistymi spełniającymi warunek $a+b=1$. Udowodnić nierówność

$$(a^2+b)(b^2+a) \geqslant \frac{9}{16}.$$

2. W trójkącie ABC punkt I jest środkiem okręgu wpisanego. Punkt X leży na odcinku AB, przy czym spełniony jest warunek $\sphericalangle AIX = 90^\circ$. Okrąg opisany na trójkącie BIX przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie Y różnym od B, leżącym po tej samej stronie prostej AB co punkt C. Wykazać, że prosta YX jest dwusieczną kąta AYB.

3. Dane są dodatnie liczby całkowite a, b, c, przy czym $b > c$ oraz $a > 1$. Udowodnić, że liczba $a^{b^2} - a^{c^2}$ jest podzielna przez liczbę $a^b - a^c$.

4. Jadzia ma kostkę w kształcie czworościanu foremnego o krawędzi długości n oraz ma do dyspozycji n^2 naklejek w kształcie trójkątów równobocznych o boku długości 2. Chciałaby okleić kostkę naklejkami, zginając je w razie potrzeby, w taki sposób, by każdy punkt na jej powierzchni był przykryty przez przynajmniej jedną naklejkę. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite n, dla których Jadzia może to zrobić.

Uwaga: ***W tym roku szkolnym zadania zawodów pierwszego stopnia OM będą publikowane sukcesywnie: pierwsza seria 1 września 2021 r., druga seria 1 października 2021 r., a trzecia seria 25 października 2021 r.***

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

15 października 2021 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane. Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.

LXXIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego
II seria: do 8 listopada 2021 r.

5. Dane są dodatnie liczby całkowite $a, b \leqslant 2^{2021}$. Załóżmy, że dla pewnej liczby całkowitej $m \geqslant 2021$ liczba a^{m+1} jest podzielna przez b^m, a liczba b^{m+1} jest podzielna przez a^m. Dowieść, że $a = b$.

6. Dana jest funkcja kwadratowa f oraz parami różne liczby rzeczywiste x, y, z, dla których $f(x) = yz$, $f(y) = zx$, $f(z) = xy$. Wyrazić jawnie wartość $f(x + y + z)$ w zależności od x, y, z.

7. W każdym wierzchołku 2021-kąta foremnego siedzi tresowana pchła. Każdej przekątnej tego wielokąta przypisano numer będący dodatnią liczbą całkowitą, przy czym różnym przekątnym przypisano różne numery. Na sygnał tresera pchły zaczynają skakać wzdłuż przekątnych od wierzchołka do wierzchołka. Przestrzegają one następującej reguły: przed każdym skokiem każda pchła sprawdza, które przekątne mające koniec w jej obecnym położeniu mają większy numer od wszystkich przekątnych wzdłuż których ta pchła dotychczas skoczyła, spośród nich wybiera tę o najniższym numerze i skacze wzdłuż niej; jeśli takich przekątnych nie ma, pchła przestaje skakać. Wykazać, że każda pchła zatrzyma się w innym wierzchołku.

Uwaga: W jednym wierzchołku może znajdować się wiele pcheł równocześnie. Każda pchła może odwiedzać wielokrotnie ten sam wierzchołek.

8. Dany jest trójkąt ABC. Punkt D jest rzutem prostokątnym punktu A na prostą BC, a punkt E jest rzutem prostokątnym punktu D na prostą AC. Punkt M jest środkiem boku AB. Dowieść, że $\sqrt{2} \cdot EM \leqslant AB$.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

8 listopada 2021 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane. Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.

LXXIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego
III seria: do 30 listopada 2021 r.

9. Dana jest liczba pierwsza p. Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb całkowitych n, dla których liczba $2^{3^n} - n$ jest podzielna przez p.

10. Dana jest dodatnia liczba całkowita n oraz parami różne dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c spełniające równość

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1.$$

Dowieść, że

$$\frac{a^n - b^n}{a^{n+1} - b^{n+1}} + \frac{b^n - c^n}{b^{n+1} - c^{n+1}} + \frac{c^n - a^n}{c^{n+1} - a^{n+1}} < \frac{n}{n+1}.$$

11. Dany jest trójkąt prostokątny ABC. Punkt D jest rzutem prostokątnym punktu C na przeciwprostokątną AB. Punkty I i J są środkami okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty ADC i BDC. Prosta ℓ, różna od AB, jest styczna do obu tych okręgów, przy czym okręgi te leżą po tej samej stronie prostej ℓ. Punkty P i Q są punktami przecięcia prostej ℓ odpowiednio z bokami AC i BC. Udowodnić, że pięciokąt $CPIJQ$ można wpisać w okrąg.

12. Dane są dodatnie liczby całkowite k, n tej samej parzystości. Na okręgu zaznaczono $2n$ punktów. Narysowano k cięciw tego okręgu o obu końcach wśród zaznaczonych punktów, przy czym każdy punkt jest końcem nieparzyście wielu cięciw. Każdemu z zaznaczonych punktów chcemy przypisać jeden z numerów $1, 2, \ldots, 2n$, przy czym różnym punktom chcemy przypisać różne numery. Punkt A nazwiemy *cudownym*, jeśli liczba cięciw łączących A z punktami o numerach mniejszych od numeru A jest parzysta. Wykazać, że numery można przypisać w taki sposób, aby dokładnie n punktów było cudownych.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

30 listopada 2021 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane. Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.

Adresy Komitetów Okręgowych Olimpiady Matematycznej

- Dla województwa pomorskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego,
ul. Wita Stwosza 57, 80–952 Gdańsk.
- Dla województwa śląskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego,
ul. Bankowa 14, 40-007 Katowice.
- Dla województwa małopolskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego,
ul. Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków.
- Dla województwa lubelskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Zakład Rachunku Prawdopodobieństwa pok. 810, Instytut Matematyki Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej,
pl. Marii Curie-Skłodowskiej 1, 20-031 Lublin.
- Dla województwa łódzkiego i świętokrzyskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego,
ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.
- Dla województwa wielkopolskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Adama Mickiewicza,
ul. Uniwersytetu Poznańskiego 4, 61-614 Poznań.
- Dla województwa podkarpackiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyczno–Przyrodniczy, Uniwersytetu Rzeszowskiego
ul. Pigonia 1, 35-310 Rzeszów.
- Dla województwa lubuskiego i zachodniopomorskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Szczecińskiego,
ul. Wielkopolska 15, 70-451 Szczecin.
- Dla województwa kujawsko-pomorskiego i warmińsko-mazurskiego:
— Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.
- Dla województwa mazowieckiego i podlaskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk,
ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa.
- Dla województwa dolnośląskiego i opolskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego,
pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: `https://om.mimuw.edu.pl`