LXXIII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia pierwszego

1. Niech a, b będą liczbami rzeczywistymi spełniającymi warunek $a+b=1$. Udowodnić nierówność

$$(a^2+b)(b^2+a) \geqslant \frac{9}{16}.$$

Autor zadania: Piotr Nayar

Rozwiązanie:

Sposób 1. Z równości danej w treści zadania obliczamy $b=1-a$. Mamy zatem $a^2+b=a^2-a+1$ oraz $b^2+a=(1-a)^2+a=1-2a+a^2+a=a^2-a+1$. Zapisując trójmian kwadratowy a^2-a+1 w postaci kanonicznej otrzymujemy $a^2-a+1=(a-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$. Wynika stąd, że $a^2-a+1 \geqslant \frac{3}{4}$. Ostatecznie,

$$(a^2+b)(b^2+a)=(a^2-a+1)^2 \geqslant \left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}.$$

Sposób 2. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}(a^2+b)(b^2+a) &= a^2b^2+a^3+b^3+ab = a^2b^2+(a+b)(a^2-ab+b^2)+ab= \\ &= a^2b^2+a^2-ab+b^2+ab=a^2b^2+a^2+b^2= \\ &= \left(ab-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{8}(a-b)^2+\frac{5}{8}(a+b)^2-\frac{1}{16} \geqslant \\ &\geqslant \frac{5}{8}-\frac{1}{16}=\frac{9}{16}.\end{aligned}$$

Sposób 3. Podobnie jak w sposobie drugim dowodzimy, że lewa strona nierówności jest równa liczbie $a^2b^2+a^2+b^2$. Do obu stron nierówności dodajemy 1, mamy więc udowodnić, że

$$(a^2+1)(b^2+1)=a^2b^2+a^2+b^2+1 \geqslant \frac{25}{16}.$$

Ta nierówność jest szczególnym przypadkiem nierówności Cauchy'ego-Schwarza: dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ zachodzi nierówność

$$(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2) \geqslant (x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n)^2.$$

Rzeczywiście, przyjmując $n=5$, $x_1=a$, $y_2=b$, $x_2=x_3=x_4=x_5=y_1=y_3=y_4=y_5=\frac{1}{2}$ otrzymujemy

$$\left(a^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2+b^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right) \geqslant$$
$$\geqslant \left(a\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot b+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)^2,$$

czyli

$$(a^2+1)(b^2+1) \geqslant \left(\frac{a+b}{2}+\frac{3}{4}\right)^2=\frac{25}{16},$$

gdyż $a+b=1$.

2. W trójkącie ABC punkt I jest środkiem okręgu wpisanego. Punkt X leży na odcinku AB, przy czym spełniony jest warunek $\sphericalangle AIX = 90°$. Okrąg opisany na trójkącie BIX przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie Y różnym od B, leżącym po tej samej stronie prostej AB co punkt C. Wykazać, że prosta YX jest dwusieczną kąta AYB.

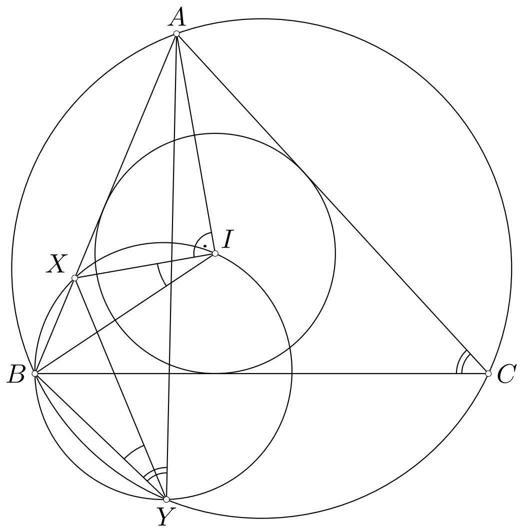
Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Mamy $\sphericalangle AYB = \sphericalangle ACB$, jako że kąty te oparte są na tym samym łuku AB okręgu opisanego na trójkącie ABC. Wystarczy zatem pokazać, że $\sphericalangle XYB = \frac{1}{2}\sphericalangle ACB$.

Zauważmy, że $\sphericalangle XYB = \sphericalangle XIB$, jako że kąty te są oparte na tym samym łuku okręgu opisanego na trójkącie BIX. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, więc proste AI i BI są dwusiecznymi kątów BAC i CBA. W takim razie $\sphericalangle BAI = \frac{1}{2}\sphericalangle BAC$ i $\sphericalangle IBA = \frac{1}{2}\sphericalangle CBA$. Stąd i z tego, że suma kątów dowolnego trójkąta wynosi 180°, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\sphericalangle XIB &= 180° - \sphericalangle IBA - \sphericalangle BAI - \sphericalangle AIX = 180° - \frac{1}{2}\sphericalangle CBA - \frac{1}{2}\sphericalangle BAC - 90° \\ &= \frac{1}{2}\left(180° - \sphericalangle CBA - \sphericalangle BAC\right) = \frac{1}{2}\sphericalangle ACB.\end{aligned}$$



Ostatecznie,

$$\sphericalangle XYB = \sphericalangle XIB = \frac{1}{2}\sphericalangle ACB,$$

co kończy dowód.

Uwaga. Założenie, że punkt Y leży po tej samej stronie prostej AB co punkt C, można pominąć w treści zadania. Okazuje się bowiem, że tak właśnie jest dla dowolnego trójkąta. Aby to uzasadnić przeprowadzimy dowód nie wprost: przypuśćmy, że punkty Y i C leżą po różnych stronach prostej AB. Korzystając dwukrotnie z tego, że w czworokącie wpisanym w okrąg suma dwóch przeciwległych kątów wynosi 180°, otrzymujemy $\sphericalangle BYA = 180° - \sphericalangle ACB$ oraz $\sphericalangle BYX = 180° - \sphericalangle XIB = 180° - \frac{1}{2}\sphericalangle ACB$. (Użyliśmy tutaj udowodnionej w rozwiązaniu równości $\sphericalangle XIB = \frac{1}{2}\sphericalangle ACB$. W jej dowodzie nie wykorzystywaliśmy w żaden sposób założenia o położeniu punktu Y.) Z tych równości wynika, że $\sphericalangle BYX > \sphericalangle BYA$. Z drugiej strony, X leży wewnątrz kąta BYA, więc zachodzi nierówność przeciwna: $\sphericalangle BYX < \sphericalangle BYA$. Otrzymana sprzeczność kończy dowód nie wprost.

3. Dane są dodatnie liczby całkowite a, b, c, przy czym $b > c$ oraz $a > 1$. Udowodnić, że liczba $a^{b^2} - a^{c^2}$ jest podzielna przez liczbę $a^b - a^c$.

Autor zadania: Emil Łasocha

Rozwiązanie:

Ze wzoru skróconego mnożenia

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

wynika, że jeśli x, y, n są dodatnimi liczbami całkowitymi spełniającymi warunek $x > y$, to liczba $x^n - y^n$ jest podzielna przez $x - y$.

Rozwiązanie dokończymy na dwa sposoby.

Sposób 1.

Zauważmy, że

$$a^{b^2} - a^{c^2} = a^{b^2} - a^{bc} + a^{bc} - a^{c^2} = \Big((a^b)^b - (a^c)^b\Big) + \Big((a^b)^c - (a^c)^c\Big).$$

Z powyższej obserwacji dla $x = a^b, y = a^c$ oraz $n = b$ wynika, że liczba $(a^b)^b - (a^c)^b$ jest podzielna przez $a^b - a^c$. Podobnie liczba $(a^b)^c - (a^c)^c$ jest podzielna przez $a^b - a^c$. Liczba $a^{b^2} - a^{c^2}$ jest zatem podzielna przez $a^b - a^c$ jako suma dwóch liczb podzielnych przez tę liczbę.

Sposób 2.

Zauważmy, że $a^b - a^c = a^c(a^{b-c} - 1)$ oraz $a^{b^2} - a^{c^2} = a^{c^2}(a^{b^2-c^2} - 1)$. Skoro $c \leqslant c^2$, to liczba a^{c^2} dzieli się przez a^c. Do zakończenia rozwiązania wystarczy więc dowieść, że liczba $a^{b^2-c^2} - 1$ dzieli się przez $a^{b-c} - 1$. Mamy

$$a^{b^2-c^2} - 1 = a^{(b-c)(b+c)} - 1 = (a^{b-c})^{b+c} - 1^{b+c},$$

więc liczba ta dzieli się przez $a^{b-c} - 1$ na mocy początkowej obserwacji zastosowanej do liczb $x = a^{b-c}$, $y = 1$ i $n = b + c$.

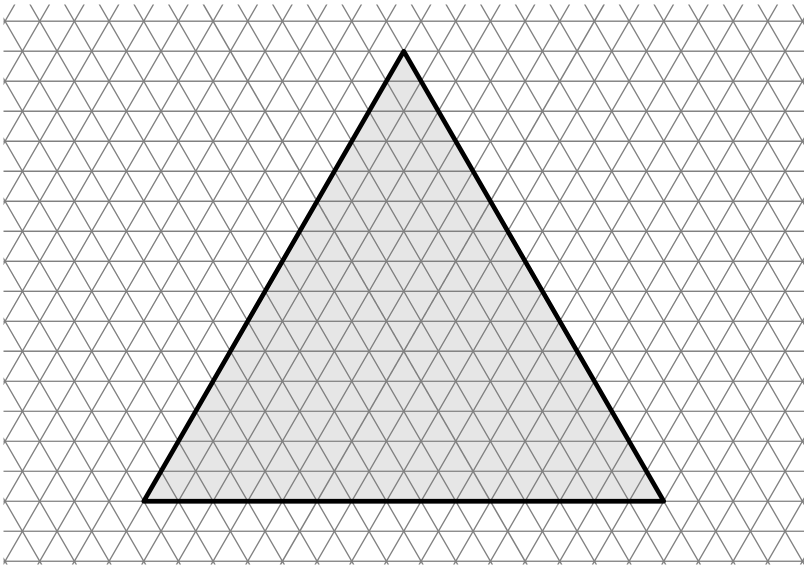
4. Jadzia ma kostkę w kształcie czworościanu foremnego o krawędzi długości n oraz ma do dyspozycji n^2 naklejek w kształcie trójkątów równobocznych o boku długości 2. Chciałaby okleić kostkę naklejkami, zginając je w razie potrzeby, w taki sposób, by każdy punkt na jej powierzchni był przykryty przez przynajmniej jedną naklejkę. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite n, dla których Jadzia może to zrobić.

Autorzy zadania: Łukasz Bożyk i Michał Pilipczuk

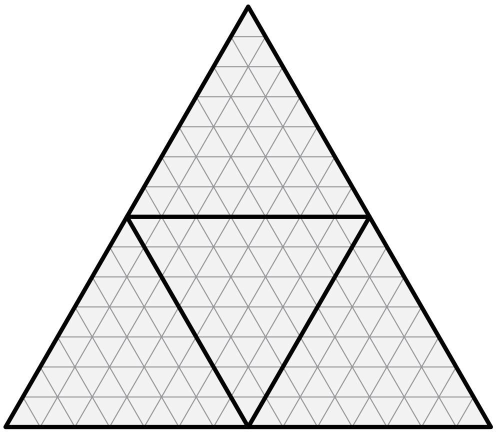
Rozwiązanie:

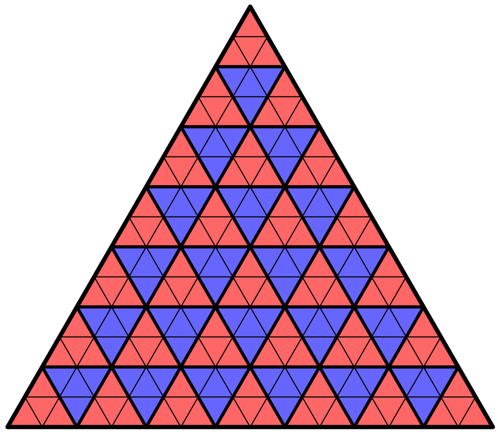
Odpowiedź: Jadzia może okleić kostkę zgodnie z warunkami zadania dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych n.

W rozwiązaniu wykorzystamy następującą obserwację: jeśli m jest liczbą naturalną i $a > 0$, to trójkąt równoboczny o boku $m \cdot a$ można podzielić na m^2 trójkątów równobocznych o boku a. Aby to dostrzec wystarczy zauważyć, że płaszczyznę można wykafelkować trójkątami równobocznymi o boku a w sposób przedstawiony na rysunku, a trójkąt równoboczny o boku $m \cdot a$ można umieścić na płaszczyźnie tak, by przykrywał całe kafelki. Porównując pole dużego trójkąta i pola małych trójkątów widzimy, że duży trójkąt przykrywa m^2 kafelków.



Przejdźmy do rozwiązania zadania. Rozważmy siatkę czworościanu foremnego o krawędzi długości n przedstawioną na poniższym rysunku. Jest ona trójkątem równobocznym o boku $2n$. Ze względu na możliwość zginania naklejek, wystarczy okleić naklejkami tę siatkę. Z obserwacji poczynionej na początku wynika, że trójkąt równoboczny o boku długości $2n$ można podzielić na n^2 trójkątów równobocznych o boku długości 2 — wystarczy więc przykleić naklejkę na każdy z trójkątów o boku 2.





5. Dane są dodatnie liczby całkowite $a, b \leqslant 2^{2021}$. Załóżmy, że dla pewnej liczby całkowitej $m \geqslant 2021$ liczba a^{m+1} jest podzielna przez b^m, a liczba b^{m+1} jest podzielna przez a^m. Dowieść, że $a = b$.

Autor zadania: Rami Ayoush

Rozwiązanie:

Dla zwięzłości zapisu, jeśli x jest dzielnikiem y, będziemy pisać $x \mid y$.

Sposób 1. Niech $d = \mathrm{NWD}(a, b)$. Określmy $a' = \frac{a}{d}$ i $b' = \frac{b}{d}$. Wówczas a' i b' są liczbami naturalnymi, $a = a'd$, $b = b'd$ i $\mathrm{NWD}(a', b') = 1$. Warunek $a^m \mid b^{m+1}$ oznacza, że $(a')^m d^m \mid (b')^{m+1} d^{m+1}$, a stąd dostajemy $(a')^m \mid (b')^{m+1} d$. Skoro zaś $\mathrm{NWD}(a', b') = 1$, to z tej podzielności wnioskujemy, że $(a')^m \mid d$. Wobec tego $(a')^{m+1} \mid d \cdot a' = a$. Stąd i z założeń $a \leqslant 2^{2021}$ i $m \geqslant 2021$ dostajemy

$$(a')^{2022} \leqslant (a')^{m+1} \leqslant a \leqslant 2^{2021}.$$

To oznacza, że $a' \leqslant 2^{2021/2022} < 2$. Wynika stąd, że $a' = 1$. Analogicznie dowodzimy, że $b' = 1$. Ostatecznie, $a = a'd = d$ i $b = b'd = d$, więc $a = b$.

Sposób 2. Przeprowadzimy dowód nie wprost: założymy, że $a \neq b$ i doprowadzimy do sprzeczności.

Niech $a \neq b$. Wtedy rozkłady liczb a i b na czynniki pierwsze są różne. To znaczy: istnieje taka liczba pierwsza p, że najwyższa potęga p dzieląca a jest różna od najwyższej potęgi p dzielącej b. Ustalmy taką liczbę pierwszą p i niech p^k będzie najwyższą potęgą p dzielącą liczbę a, a p^ℓ — najwyższą potęgą p dzielącą liczbę b. Wtedy $k \neq \ell$.

Przyjmijmy, że $k < \ell$ (rozumowanie w przypadku $k > \ell$ jest analogiczne). Wtedy $k + 1 \leqslant \ell$. Z podzielności $b^m \mid a^{m+1}$ dostajemy $p^{\ell m} \mid p^{k(m+1)}$. Wobec tego $\ell m \leqslant k(m + 1)$. Mamy więc szacowania $km + m = (k + 1)m \leqslant \ell m \leqslant k(m + 1) = km + k$, więc $m \leqslant k$. Z założeń zadania mamy $m \geqslant 2021$, więc $2021 \leqslant m \leqslant k \leqslant \ell - 1$, wobec czego $\ell \geqslant 2022$. Skoro liczba b dzieli się przez p^ℓ, to $b \geqslant p^\ell \geqslant p^{2022} \geqslant 2^{2022}$. To stoi w sprzeczności z nierównością $b \leqslant 2^{2021}$. Otrzymana sprzeczność kończy rozwiązanie zadania.

6. Dana jest funkcja kwadratowa f oraz parami różne liczby rzeczywiste x, y, z, dla których $f(x) = yz$, $f(y) = zx$, $f(z) = xy$. Wyrazić jawnie wartość $f(x + y + z)$ w zależności od x, y, z.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Sposób 1. Funkcja f jest dana wzorem $f(t) = at^2 + bt + c$ dla pewnych liczb rzeczywistych a, b, c. Równości dane w treści zadania możemy więc napisać w postaci poniższego układu równań, z którego następnie wyznaczymy a, b, c w zależności od x, y, z.

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = yz \\ ay^2 + by + c = zx \\ az^2 + bz + c = xy \end{cases}$$

Odejmując drugie równanie od pierwszego otrzymujemy $a(x^2-y^2)+b(x-y)=z(y-x)$. Liczby x,y są różne, więc obie strony tego równania można podzielić przez $x-y$. Wykorzystując wzór skróconego mnożenia $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$ dostajemy zatem $a(x+y)+b=-z$. Odejmując trzecie równanie od drugiego i prowadząc analogiczne rachunki dochodzimy do równości $a(y+z)+b=-x$. Odejmując stronami dwa otrzymane równania otrzymujemy $a(x-z)=x-z$. Ponieważ $x\neq z$, więc $a=1$. Z równości $a(x+y)+b=-z$ obliczamy $b=-z-a(x+y)=-(x+y+z)$. Mamy też $c=yz-ax^2-bx=yz-x^2+(x+y+z)x=xy+yz+zx$.

W takim razie funkcja f dana jest wzorem $f(t)=t^2-(x+y+z)t+xy+yz+zx$ i wobec tego

$$f(x+y+z)=(x+y+z)^2-(x+y+z)(x+y+z)+xy+yz+zx=xy+yz+zx.$$

Sposób 2. Podobnie jak w sposobie pierwszym zapisujemy $f(t)=at^2+bt+c$. Równość $f(x)=yz$ mnożymy stronami przez x i otrzymujemy $ax^3+bx^2+cx=xyz$. To znaczy: x jest pierwiastkiem wielomianu trzeciego stopnia $g(t)=at^3+bt^2+ct-xyz$. Analogicznie dowodzimy, że y i z są pierwiastkami wielomianu g. Liczby x,y,z są parami różne, więc są to wszystkie pierwiastki wielomianu g. Stąd

$$at^3+bt^2+ct-xyz=g(t)=a(t-x)(t-y)(t-z)=at^3-a(x+y+z)t^2+a(xy+yz+zx)t-axyz.$$

Przyrównując współczynniki stojące przy odpowiednich potęgach zmiennej t otrzymujemy następujące równości:

$$b=-a(x+y+z),\quad c=a(xy+yz+zx),\quad -xyz=-axyz.$$

Jeżeli $xyz\neq 0$, to z trzeciej równości natychmiast wynika, że $a=1$. Jeśli zaś $xyz=0$, to któraś z liczb x,y,z jest zerem, a pozostałe dwie nie. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $x=0$. Wtedy równość $c=a(xy+yz+zx)$ oznacza, że $c=ayz$, a warunek $f(x)=yz$ daje $c=yz$. Ponieważ $yz\neq 0$, mamy $a=1$.

Dowiedliśmy, że w obu przypadkach mamy $a=1$. Stąd też $b=-(x+y+z)$ i $c=xy+yz+zx$. Identycznie jak w sposobie pierwszym obliczamy $f(x+y+z)=xy+yz+zx$.

7. W każdym wierzchołku 2021-kąta foremnego siedzi tresowana pchła. Każdej przekątnej tego wielokąta przypisano numer będący dodatnią liczbą całkowitą, przy czym różnym przekątnym przypisano różne numery. Na sygnał tresera pchły zaczynają skakać wzdłuż przekątnych od wierzchołka do wierzchołka. Przestrzegają one następującej reguły: przed każdym skokiem każda pchła sprawdza, które przekątne mające koniec w jej obecnym położeniu mają większy numer od wszystkich przekątnych wzdłuż których ta pchła dotychczas skoczyła, spośród nich wybiera tę o najniższym numerze i skacze wzdłuż niej; jeśli takich przekątnych nie ma, pchła przestaje skakać. Wykazać, że każda pchła zatrzyma się w innym wierzchołku.

Uwaga: W jednym wierzchołku może znajdować się wiele pcheł równocześnie. Każda pchła może odwiedzać wielokrotnie ten sam wierzchołek.

Autorzy zadania: Marta i Michał Strzeleccy

Rozwiązanie:

Sposób 1. Wykażemy, że teza zadania pozostaje prawdziwa jeśli numery przypisano pewnym przekątnym, niekoniecznie wszystkim. Przeprowadzimy dowód indukcyjny ze względu na liczbę przekątnych z przypisanym numerem.

Baza indukcji: żadnej z przekątnych nie przypisano numeru. Wtedy żadna z pcheł nie może wykonać skoku i teza jest oczywista — każda pchła znajduje się w innym wierzchołku.

Krok indukcyjny: załóżmy, że teza jest spełniona dla dowolnego przypisania $n\geqslant 0$ numerów niektórym przekątnym. Rozważmy dowolne przypisanie $n+1$ numerów niektórym przekątnym. Rozważmy przekątną o najniższym numerze. Oznaczmy jej końce przez a i b. Zauważmy, że pchła znajdująca się w wierzchołku a skoczy wzdłuż przekątnej ab do wierzchołka b, a pchła znajdująca się w wierzchołku b skoczy wzdłuż ab do wierzchołka a. Po tych dwóch skokach wciąż każda pchła znajduje się w innym wierzchołku. Oczywiście następne skoki wykonywane przez te dwie pchły nie mogą odbyć się wzdłuż przekątnej ab. Ponadto żadna inna pchła nigdy nie wykona skoku wzdłuż ab, gdyż jej pierwszy skok musi zostać wykonany wzdłuż przekątnej o numerze większym od numeru ab. W takim razie możemy usunąć numer przekątnej ab nie zaburzając kolejnych wyborów pcheł. Po usunięciu numeru przekątnej ab otrzymujemy numerowanie n przekątnych, więc z założenia indukcyjnego wynika, że każda pchła zatrzyma się w innym wierzchołku.

Sposób 2. Zauważmy przede wszystkim, że po pewnym czasie wszystkie pchły przestaną skakać. Wynika to z obserwacji, że każda pchła może skoczyć wzdłuż danej przekątnej co najwyżej raz, a liczba przekątnych jest skończona.

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Przypuśćmy, że dwie pchły zatrzymały się w tym samym wierzchołku. Nazwijmy te pchły A i B. Przyjmijmy, że pchła A wykonała k skoków, a pchła B wykonała ℓ skoków. Oznaczmy przez $a_k, a_{k-1}, a_{k-2}, \ldots, a_1, a_0$ wierzchołki, w których pchła A znajdowała się odpowiednio po $0, 1, 2, \ldots, k$ skokach. Podobnie, oznaczmy przez $b_\ell, b_{\ell-1}, b_{\ell-2}, \ldots, b_1, b_0$ wierzchołki, w których pchła B znajdowała się odpowiednio po $0, 1, 2, \ldots, \ell$ skokach. Dzięki założeniu, że A i B zatrzymały się w tym samym wierzchołku mamy $a_0 = b_0$.

Niech n będzie największym wskaźnikiem, dla którego $a_n = b_n, a_{n-1} = b_{n-1}, \ldots, a_0 = b_0$. To znaczy: $a_n = b_n$ jest najwcześniejszym wierzchołkiem począwszy od którego trasy przebyte przez obie pchły są takie same. Oczywiście $0 \leqslant n \leqslant \min(k, \ell)$. Dalszą część dowodu rozbijemy na trzy przypadki i w każdym uzyskamy sprzeczność.

1° $n = 0$, tj. pchły przeskoczyły do końcowego wierzchołka $a_0 = b_0$ z różnych wierzchołków. Bez straty ogólności przyjmijmy, że numer a_1a_0 jest większy od numeru b_1b_0. Wtedy numer przekątnej $a_1a_0 = a_1b_0$ jest większy także od numerów wszystkich przekątnych $b_\ell b_{\ell-1}, \ldots, b_2b_1, b_1b_0$. Tak więc pchła B po wykonaniu skoku wzdłuż przekątnej b_1b_0 może wykonać kolejny skok wzdłuż przekątnej b_0a_1. To przeczy temu, że B przestała skakać po skoku wzdłuż b_1b_0.

2° $0 < n < \min(k, \ell)$, tj. pchły przeskoczyły do wierzchołka $a_n = b_n$ z różnych wierzchołków, po osiągnięciu którego pchły skakały dalej wzdłuż tej samej trasy. Bez straty ogólności przyjmijmy, że numer $a_{n+1}a_n$ jest większy od numeru $b_{n+1}b_n$. Jest on wtedy większy od numerów $b_\ell b_{\ell-1}, \ldots, b_{n+1}b_n$. Z drugiej strony, ze względu na to, że A skoczyła wzdłuż $a_{n+1}a_n$ zanim skoczyła wzdłuż a_na_{n-1}, numer $a_{n+1}a_n$ jest mniejszy od numeru przekątnej $a_na_{n-1} = b_nb_{n-1}$. Tak więc pchła B nie mogła skoczyć wzdłuż b_nb_{n-1} — ma ona numer większy od numerów $b_\ell b_{\ell-1}, \ldots, b_{n+1}b_n$, ale nie jest to przekątna o najmniejszym możliwym numerze spośród przekątnych o tej własności. Sprzeczność.

3° $n = \min(k, \ell)$, tj. trasa przebyta przez jedną z pcheł całkowicie zawiera się w trasie przebytej przez drugą z pcheł. Załóżmy bez straty ogólności, że $k > \ell$. Wtedy $n = \ell$. Pchła A skoczyła wzdłuż $a_{\ell+1}a_\ell$ zanim skoczyła wzdłuż $a_\ell a_{\ell-1}$, więc numer $a_{\ell+1}a_\ell$ jest mniejszy od numeru przekątnej $a_\ell a_{\ell-1} = b_\ell b_{\ell-1}$. Wtedy jednak pchła B nie mogła oddać pierwszego skoku wzdłuż $b_\ell b_{\ell-1}$, gdyż przekątna $a_{\ell+1}a_\ell = a_{\ell+1}b_\ell$ ma od niej niższy numer. Sprzeczność.

8. Dany jest trójkąt ABC. Punkt D jest rzutem prostokątnym punktu A na prostą BC, a punkt E jest rzutem prostokątnym punktu D na prostą AC. Punkt M jest środkiem boku AB. Dowieść, że $\sqrt{2} \cdot EM \leqslant AB$.

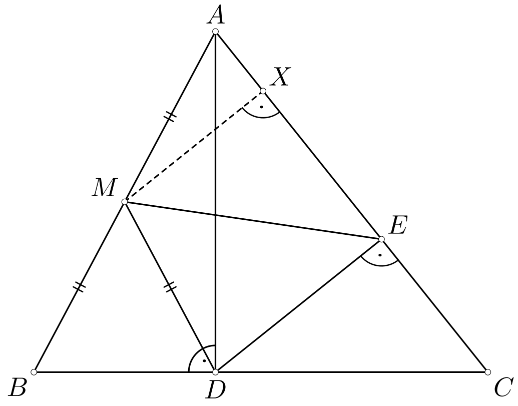
Autor zadania: Emil Łasocha

Rozwiązanie:

Sposób 1. Oznaczmy przez X rzut prostokątny punktu M na prostą AC. Wówczas $XE \leqslant MD$, gdyż długość rzutu odcinka na prostą nie przekracza długości tego odcinka. Z tego samego powodu $MX \leqslant MA$, bo odcinek MX jest rzutem odcinka MA na prostą MX. Ponadto $MA = MD = \frac{1}{2}AB$. Istotnie, jest to jasne, gdy kąt CBA jest prosty, bo wtedy punkty B i D się pokrywają. W przeciwnym razie postulowane równości wynikają z tego, że w trójkącie prostokątnym ABD środek przeciwprostokątnej AB jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie. Z twierdzenia Pitagorasa mamy też $ME^2 = MX^2 + XE^2$. Wobec tego

$$ME^2 = MX^2 + XE^2 \leqslant MA^2 + MD^2 = \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 + \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 = \frac{AB^2}{2},$$

co dowodzi tezy.



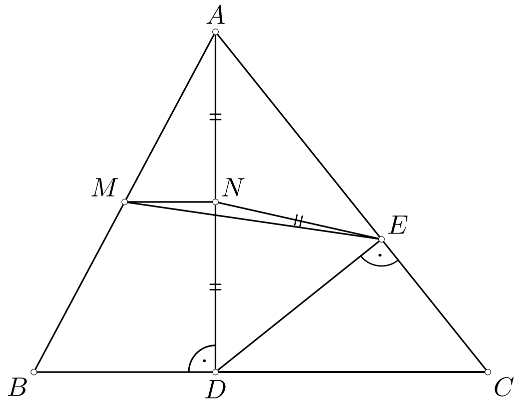
Sposób 2. Oznaczmy środek odcinka AD przez N. Wtedy MN jest linią środkową trójkąta ABD, więc $MN = \frac{1}{2}BD$. Ponadto $NE = \frac{1}{2}AD$. Faktycznie, jeśli kąt ACB jest prosty, to punkty D i E się pokrywają i równość $NE = \frac{1}{2}AD$ staje się oczywista. W przeciwnym razie N jest środkiem przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego AED, czyli środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie — stąd $NE = \frac{1}{2}AD$. Na mocy nierówności trójkąta mamy

$$EM \leqslant MN + NE = \frac{BD + AD}{2}.$$

Z nierówności między średnią arytmetyczną i średnią kwadratową mamy

$$\frac{BD + AD}{2} \leqslant \sqrt{\frac{BD^2 + AD^2}{2}} = \sqrt{\frac{AB^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}AB.$$

Łącząc powyższe nierówności dostajemy $EM \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}AB$, co jest równoważne tezie zadania.



Sposób 3. Wprowadźmy układ współrzędnych w taki sposób, by $A = (0, 1)$, a punkty B i C leżały na osi OX. Niech $B = (b, 0)$, $C = (c, 0)$. Wówczas $D = (0, 0)$.

Łatwo obliczyć, że równaniem prostej AC jest $x + cy = c$. Prosta DE jest do niej prostopadła i przechodzi przez $(0, 0)$, więc jej równaniem jest $-cx + y = 0$. Punkt E jest przecięciem prostych AC i DE, więc współrzędne punktu E znajdujemy rozwiązując układ równań $x + cy = c$, $-cx + y = 0$. Po obliczeniach otrzymujemy $E = (\frac{c}{1+c^2}, \frac{c^2}{1+c^2})$. Punkt M jest środkiem odcinka AB, więc $M = (\frac{b}{2}, \frac{1}{2})$. Należy dowieść, że $2EM^2 \leqslant AB^2$, czyli że

$$2\left(\left(\frac{c}{1+c^2} - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c^2}{1+c^2} - \frac{1}{2}\right)^2\right) \leqslant b^2 + 1.$$

Lewa strona tej nierówności jest równa

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2(c^2+1)^2}\left((2c-b(1+c^2))^2+(c^2-1)^2\right)=\\
&\frac{1}{2(c^2+1)^2}\left(4c^2-4bc(1+c^2)+b^2(1+c^2)^2+c^4-2c^2+1\right)=\\
&\frac{1}{2(c^2+1)^2}\left(-4bc(1+c^2)+b^2(1+c^2)^2+(1+c^2)^2\right)=\\
&\frac{1}{2(c^2+1)}\left(-4bc+b^2(1+c^2)+(1+c^2)\right)=\\
&\frac{1}{2(c^2+1)}\left(-4bc+(b^2+1)(c^2+1)\right)
\end{aligned}$$

Należy więc dowieść, że

$$2(b^2+1)(c^2+1)\geqslant -4bc+(b^2+1)(c^2+1).$$

Równoważnie:

$$\begin{aligned}
(b^2+1)(c^2+1)+4bc&\geqslant 0\\
b^2c^2+b^2+c^2+1+4bc&\geqslant 0\\
(bc+1)^2+(b+c)^2&\geqslant 0
\end{aligned}$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, gdyż kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną.

9. Dana jest liczba pierwsza p. Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb całkowitych n, dla których liczba $2^{3^n}-n$ jest podzielna przez p.

Na podstawie propozycji Witolda Bednarka

Rozwiązanie:

W niniejszym rozwiązaniu zapis $x\equiv y \pmod z$ będzie oznaczał, że liczby x i y dają tę samą resztę z dzielenia przez z. Zaczniemy od udowodnienia następującego lematu.

Lemat. Dane są dodatnie liczby całkowite a, m. Wówczas istnieją dodatnie liczby całkowite k, t takie, że $t<m$ oraz ciąg reszt z dzielenia liczb $a^k, a^{k+1}, a^{k+2}, \ldots$ przez m jest okresowy z okresem t.

Dowód. Jeśli dla pewnego k liczba a^k dzieli się przez m, to także dowolna potęga a o wykładniku większym od k dzieli się przez m. Wtedy $t=1$ spełnia warunki lematu.

W przeciwnym razie liczby $a, a^2, \ldots, a^m$ dają niezerowe reszty z dzielenia przez m. Tych liczb jest m a niezerowych reszt jest $m-1$, więc któreś dwie dają tę samą resztę. Niech k i $k+t$ będą najmniejszymi wykładnikami takimi, że $a^k\equiv a^{k+t} \pmod m$. Mamy $1\leqslant k<k+t\leqslant m$, więc $t<m$. Wtedy ciąg reszt z dzielenia liczb $a^k, a^{k+1}, a^{k+2}, \ldots$ przez m jest okresowy z okresem t, gdyż dla dowolnego $\ell\geqslant k$ mamy

$$a^\ell = a^{\ell-k}\cdot a^k \equiv a^{\ell-k}\cdot a^{k+t} = a^{\ell+t} \pmod m.$$

Rozwiązanie dokończymy na dwa różne sposoby.

Sposób 1. Udowodnimy przez indukcję względem m następujące zdania:

$\Phi(m)$: Istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb całkowitych n takich, że liczba $2^{3^n}-n$ dzieli się przez m.

$\Psi(m)$: Istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb całkowitych n takich, że liczba $3^{2^n}-n$ dzieli się przez m.

Tezą zadania jest zdanie $\Phi(p)$.

Baza indukcji: zdania $\Phi(1)$ i $\Psi(1)$ są oczywiście prawdziwe, bo jedynka jest dzielnikiem dowolnej liczby całkowitej.

Krok indukcyjny: ustalmy $m>1$ i załóżmy, że zdania $\Phi(m')$, $\Psi(m')$ są prawdziwe dla dowolnej liczby $m'<m$. Należy dowieść prawdziwości zdań $\Phi(m)$ i $\Psi(m)$.

Z lematu dla $a=2$ wynika, że dla pewnego k ciąg reszt z dzielenia liczb $2^k, 2^{k+1}, 2^{k+2}, \ldots$ przez m jest okresowy z okresem t mniejszym od m. Jeżeli więc liczba ℓ jest nie mniejsza od k i taka, że liczba $3^{2^\ell}-\ell$ dzieli się przez t, to

$$2^{3^{2^\ell}}\equiv 2^\ell \pmod m.$$

Zatem dla dowolnej liczby n postaci 2^ℓ, gdzie $\ell \geqslant k$ i $3^{2^\ell} - \ell$ dzieli się przez t, liczba $2^{3^n} - n$ dzieli się przez m. Takich liczb jest nieskończenie wiele na mocy zdania $\Psi(t)$, prawdziwego na mocy założenia indukcyjnego. To dowodzi prawdziwości zdania $\Phi(m)$.

Zdanie $\Psi(m)$ dowodzimy analogicznie. Z lematu dla $a = 3$ wynika, że dla pewnego k ciąg reszt z dzielenia liczb $3^k, 3^{k+1}, 3^{k+2}, \ldots$ przez m jest okresowy z okresem t mniejszym od m. Jeżeli więc liczba ℓ jest nie mniejsza od k i taka, że liczba $2^{3^\ell} - \ell$ dzieli się przez t, to

$$3^{2^{3^\ell}} \equiv 3^\ell \pmod{m}.$$

Zatem dla dowolnej liczby n postaci 3^ℓ, gdzie $\ell \geqslant k$ i $2^{3^\ell} - \ell$ dzieli się przez t, liczba $3^{2^n} - n$ dzieli się przez m. Takich liczb jest nieskończenie wiele na mocy zdania $\Phi(t)$, prawdziwego na mocy założenia indukcyjnego. To dowodzi prawdziwości zdania $\Psi(m)$ i kończy dowód indukcyjny.

Sposób 2. Dla $p = 2$ dowolna dodatnia liczba parzysta n spełnia warunki zadania (jest ich oczywiście nieskończenie wiele). Od teraz zakładać będziemy, że $p \geqslant 3$.

Stosując lemat dla $a = 3$ i $m = p - 1$ dostajemy, że dla pewnych k i t ciąg reszt z dzielenia liczb $3^k, 3^{k+1}, 3^{k+2}, \ldots$ przez $p - 1$ ma okres t. W szczególności, jeśli $n = k + \ell t$ dla pewnego ℓ, to $3^n \equiv 3^k \pmod{p-1}$. Możemy wtedy zapisać $3^n = s(p-1) + 3^k$ dla pewnego s. Na mocy małego twierdzenia Fermata mamy $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, więc

$$2^{3^n} = 2^{s(p-1)+3^k} = 2^{3^k} \cdot (2^{p-1})^s \equiv 2^{3^k} \cdot 1^s = 2^{3^k} \pmod{p}.$$

W takim razie jeśli liczba n jest postaci $k + \ell t$ oraz dodatkowo daje taką samą resztę z dzielenia przez p co 2^{3^k}, to

$$2^{3^n} - n \equiv 2^{3^k} - 2^{3^k} = 0 \pmod{p},$$

czyli innymi słowy, dla takiej liczby n liczba $2^{3^n} - n$ jest podzielna przez p. Wystarczy wykazać, że istnieje nieskończenie wiele liczb n o takich dwóch własnościach.

Powyższe dwa warunki na liczbę n można wysłowić następująco: $n \equiv k \pmod{t}$, $n \equiv 2^{3^k} \pmod{p}$. Ponieważ $t < p$, a p jest liczbą pierwszą, więc $\mathrm{NWD}(t, p) = 1$. Istnienie nieskończenie wielu liczb n spełniających te dwa warunki wynika więc wprost z chińskiego twierdzenia o resztach. Dowód został zakończony.

Uwaga. W sposobie pierwszym nie wykorzystaliśmy założenia, że p jest liczbą pierwszą.

10. Dana jest dodatnia liczba całkowita n oraz parami różne dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c spełniające równość

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1.$$

Dowieść, że

$$\frac{a^n - b^n}{a^{n+1} - b^{n+1}} + \frac{b^n - c^n}{b^{n+1} - c^{n+1}} + \frac{c^n - a^n}{c^{n+1} - a^{n+1}} < \frac{n}{n+1}.$$

Autor zadania: Piotr Nayar

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że jeśli liczby $x \neq y$ są dodatnie, to

$$\frac{x^n - y^n}{x^{n+1} - y^{n+1}} < \frac{n}{2(n+1)} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right).$$

Po zsumowaniu tej nierówności dla $(x, y) = (a, b), (b, c), (c, a)$ oraz skorzystaniu z warunku $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ otrzymamy tezę zadania. Dalszą część rozwiązania przeprowadzimy na dwa różne sposoby.

Sposób 1. Mamy

$$\frac{x^n - y^n}{x^{n+1} - y^{n+1}} = \frac{(x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1})}{(x-y)(x^n + x^{n-1}y + \ldots + xy^{n-1} + y^n)} = \frac{x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}}{x^n + x^{n-1}y + \ldots + xy^{n-1} + y^n}.$$

Należy więc dowieść, że

$$\frac{x^{n-1}+x^{n-2}y+\ldots+xy^{n-2}+y^{n-1}}{x^n+x^{n-1}y+\ldots+xy^{n-1}+y^n}<\frac{n}{2(n+1)}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right).$$

Po wymnożeniu przez mianowniki i przekształceniach otrzymujemy równoważnie

$$\begin{aligned} 2(n+1)xy(x^{n-1}+x^{n-2}y+\ldots+xy^{n-2}+y^{n-1}) &< n(x+y)(x^n+x^{n-1}y+\ldots+xy^{n-1}+y^n)\\ 2(n+1)(x^ny+x^{n-1}y^2+\ldots+xy^n) &< nx^{n+1}+2n(x^ny+x^{n-1}y^2+\ldots+xy^n)+ny^{n+1}\\ 2(x^ny+x^{n-1}y^2+\ldots+xy^n) &< n(x^{n+1}+y^{n+1}) \qquad (\star)\end{aligned}$$

Do zakończenia dowodu wystarczy pokazać, że dla każdego $i=1,2,\ldots,n$ zachodzi nierówność

$$x^{n+1-i}y^i+x^iy^{n+1-i}<x^{n+1}+y^{n+1},$$

bowiem sumując te nierówności otrzymamy nierówność $(\star)$, do której sprowadziliśmy tezę zadania. Mamy

$$x^{n+1}+y^{n+1}-x^{n+1-i}y^i-x^iy^{n+1-i}=(x^i-y^i)(x^{n+1-i}-y^{n+1-i})>0,$$

gdyż oba czynniki są jednocześnie dodatnie (gdy $x>y$) lub jednocześnie ujemne (gdy $x<y$). To dowodzi, że $x^{n+1-i}y^i+x^iy^{n+1-i}<x^{n+1}+y^{n+1}$ i kończy rozwiązanie zadania.

Sposób 2. Nierówność pomocniczą udowodnimy przez indukcję ze względu na n.

Dla $n=1$ lewa strona jest równa $\frac{x-y}{x^2-y^2}=\frac{1}{x+y}$, więc należy dowieść, że $\frac{1}{x+y}<\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$. Po wymnożeniu przez mianowniki dostajemy $4xy<(x+y)^2$. Ta nierówność jest prawdziwa, bo $(x+y)^2-4xy=(x-y)^2>0$.

Krok indukcyjny: załóżmy, że dla pewnego $n\geqslant 1$ zachodzi nierówność $\frac{x^n-y^n}{x^{n+1}-y^{n+1}}<\frac{n}{2(n+1)}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$. Należy dowieść, że $\frac{x^{n+1}-y^{n+1}}{x^{n+2}-y^{n+2}}<\frac{n+1}{2(n+2)}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$. Równoważnie: $\frac{x^{n+2}-y^{n+2}}{x^{n+1}-y^{n+1}}>\frac{2(n+2)xy}{(n+1)(x+y)}$. Mamy na mocy założenia indukcyjnego

$$\begin{aligned}\frac{x^{n+2}-y^{n+2}}{x^{n+1}-y^{n+1}} &= x+y-xy\cdot\frac{x^n-y^n}{x^{n+1}-y^{n+1}}\\ &> x+y-xy\cdot\frac{n}{2(n+1)}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\\ &= x+y-\frac{n}{2(n+1)}(x+y)=\frac{(x+y)(n+2)}{2(n+1)}.\end{aligned}$$

Aby zakończyć dowód, wystarczy sprawdzić, że

$$\frac{(x+y)(n+2)}{2(n+1)}>\frac{2(n+2)xy}{(n+1)(x+y)}.$$

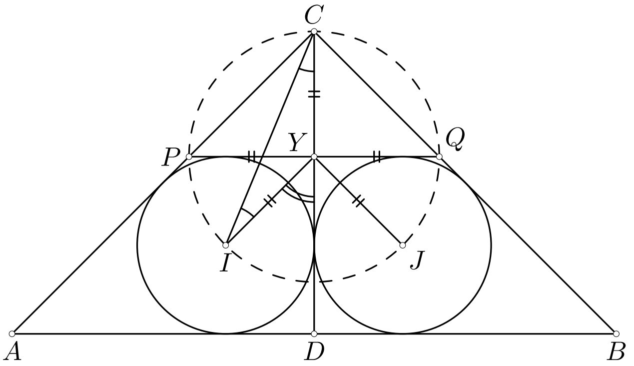
Po wymnożeniu mianowników i skróceniu wspólnych czynników obu stron dostajemy $(x+y)^2>4xy$, czyli równoważnie $(x-y)^2>0$.

11. Dany jest trójkąt prostokątny ABC. Punkt D jest rzutem prostokątnym punktu C na przeciwprostokątną AB. Punkty I, J są środkami okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty ADC i BDC. Wspólna styczna zewnętrzna do tych okręgów, różna od AB, przecina boki AC i BC w punktach P i Q. Udowodnić, że pięciokąt $CPIJQ$ jest wpisany w okrąg.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Na początku rozważymy przypadek, w którym $AC=BC$. Niech Y będzie przecięciem odcinków CD i PQ. Mamy oczywiście $\sphericalangle PCY=45^\circ=\sphericalangle YPC$, więc $PY=CY$. Mamy też $45^\circ=\sphericalangle IYD=\sphericalangle YIC+\sphericalangle ICY=\sphericalangle YIC+22{,}5^\circ$, więc $\sphericalangle YIC=22{,}5^\circ=\sphericalangle ICY$. Stąd $CY=IY$. Z symetrii rysunku dostajemy też $QY=PY$ i $JY=IY$. Stąd punkty C,P,I,J,Q leżą na okręgu o środku Y i promieniu CY i mamy tezę.



Załóżmy teraz, że $AC \neq BC$. Wtedy okręgi wpisane w trójkąty ACD i BCD nie są przystające, więc prosta PQ nie jest równoległa do AB. Stąd proste PQ i AB przecinają się w pewnym punkcie, który oznaczymy przez X. Załóżmy bez ograniczenia ogólności rozumowania, że A leży pomiędzy punktami X i B (jeśli B leży pomiędzy A i X, to dowód jest w pełni analogiczny). Prosta IJ przechodzi przez X, bo oba punkty I i J leżą na dwusiecznej kąta BXQ.

Oznaczmy $\sphericalangle CBA$ przez β. Wtedy $\sphericalangle BAC = 90^\circ - \beta$, $\sphericalangle DCB = 90^\circ - \beta$ i $\sphericalangle ACD = \beta$.

Dalszą część rozwiązania przeprowadzimy na dwa różne sposoby.

Sposób 1. Udowodnimy, że czworokąt $CIJQ$ można wpisać w okrąg. W tym celu sprawdzimy, że $\sphericalangle QJI + \sphericalangle ICQ = 180^\circ$. Mamy

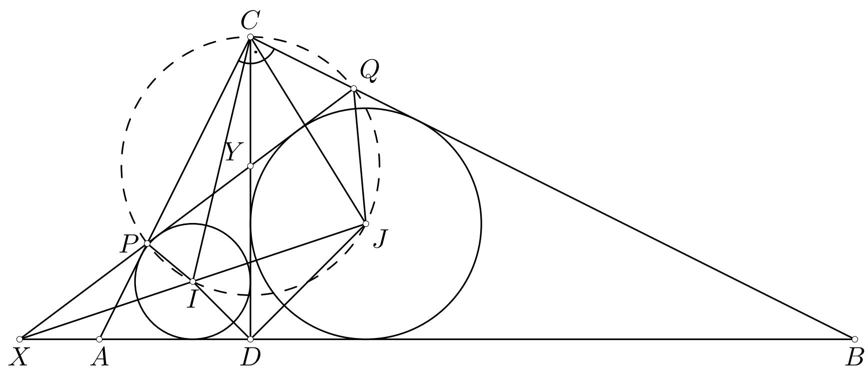
$$\sphericalangle QJX = 180^\circ - \sphericalangle JXQ - \sphericalangle XQJ = 180^\circ - \frac{1}{2}(\sphericalangle BXQ + \sphericalangle XQB) = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle QBX) = 90^\circ + \frac{1}{2}\beta$$

oraz

$$\sphericalangle ICQ = \frac{1}{2}\sphericalangle ACD + \sphericalangle DCB = \frac{1}{2}\beta + 90^\circ - \beta = 90^\circ - \frac{1}{2}\beta.$$

Stąd

$$\sphericalangle QJI + \sphericalangle ICQ = 90^\circ + \frac{1}{2}\beta + 90^\circ - \frac{1}{2}\beta = 180^\circ.$$



Udowodnimy teraz, że czworokąt $CJIP$ także można wpisać w okrąg. W tym celu sprawdzimy, że $\sphericalangle PCJ + \sphericalangle JIP = 180^\circ$. Mamy

$$\begin{aligned}\sphericalangle PIX &= 180^\circ - \sphericalangle IXP - \sphericalangle XPA - \sphericalangle API = 180^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle AXP - \sphericalangle XPA - \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle XPA)\\ &= 90^\circ - \frac{1}{2}(\sphericalangle AXP + \sphericalangle XPA) = 90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle BAC = 45^\circ + \frac{\beta}{2}.\end{aligned}$$

Ponadto

$$\sphericalangle PCJ = \sphericalangle PCD + \frac{1}{2}\sphericalangle DCB = \beta + \frac{1}{2}(90^\circ - \beta) = 45^\circ + \frac{\beta}{2}.$$

Zatem

$$\sphericalangle JIP + \sphericalangle PCJ = 180^\circ - \sphericalangle PIX + \sphericalangle PCJ = 180^\circ.$$

Udowodniliśmy, że czworokąty $CQJI$ i $CJIP$ można wpisać w okrąg. Jest to ten sam okrąg — mianowicie okrąg opisany na trójkącie CIJ. Stąd pięciokąt $CPIJQ$ jest wpisany w tenże okrąg.

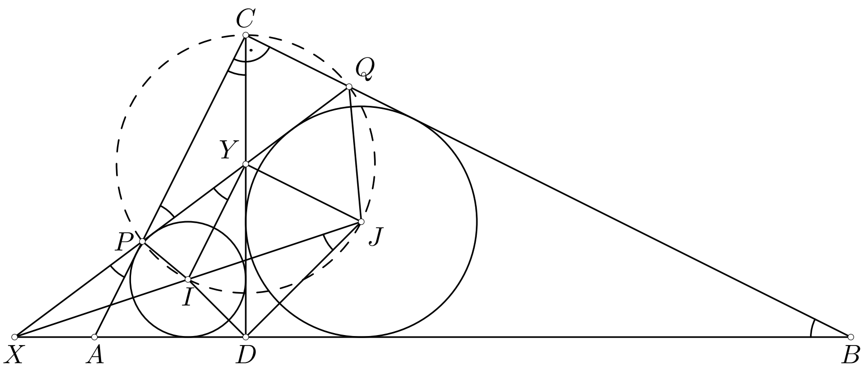
Sposób 2. Trójkąty prostokątne ADC i CDB są podobne do trójkąta prostokątnego ACB, gdyż mają takie same kąty. Odcinki DI i DJ są odcinkami łączącymi wierzchołek przy kącie prostym ze środkiem okręgu wpisanego w trójkątach ADC i CDB, a więc stosunek ich długości jest równy skali podobieństwa tych trójkątów. To znaczy:

$$\frac{DI}{DJ} = \frac{AC}{CB}.$$

Mamy ponadto

$$\sphericalangle JDI = \sphericalangle JDC + \sphericalangle CDI = \frac{1}{2}\sphericalangle BDC + \frac{1}{2}\sphericalangle CDA = \frac{1}{2}\cdot 90^\circ + \frac{1}{2}\cdot 90^\circ = 90^\circ.$$

Stąd i z otrzymanej wcześniej równości stosunków wnioskujemy, że trójkąt IDJ również jest podobny do trójkąta ACB (cecha bok-kąt-bok). Zatem $\sphericalangle IJD = \sphericalangle CBA = \beta$.



Mamy $\sphericalangle DXJ = \sphericalangle BDJ - \sphericalangle XJD = 45^\circ - \beta$. Ponadto $\sphericalangle BXP = 2\sphericalangle DXJ = 90^\circ - 2\beta$. Stąd

$$\sphericalangle QPC = \sphericalangle XPA = \sphericalangle BAC - \sphericalangle AXP = (90^\circ - \beta) - (90^\circ - 2\beta) = \beta.$$

Obliczamy dalej $\sphericalangle CQP = 180^\circ - \sphericalangle QPC - \sphericalangle PCQ = 90^\circ - \beta$.

Oznaczmy środek odcinka PQ przez Y. Jest to środek przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego CPQ, czyli środek okręgu opisanego na trójkącie CPQ.

Mamy $\sphericalangle PCY = \sphericalangle YPC = \beta = \sphericalangle PCD$. Stąd Y leży na prostej CD.

Mamy $\sphericalangle IPY = \frac{1}{2}\sphericalangle APY = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle YPC) = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$. Poza tym $\sphericalangle PYD = 2\sphericalangle YPC = 2\beta$, więc $\sphericalangle PYI = \frac{1}{2}\sphericalangle PYD = \beta$. Zatem $\sphericalangle YIP = 180^\circ - \sphericalangle IPY - \sphericalangle PYI = 180^\circ - (90^\circ - \frac{\beta}{2}) - \beta = 90^\circ - \frac{\beta}{2} = \sphericalangle IPY$. Wnioskujemy, że trójkąt PYI jest równoramienny i $PY = IY$.

Wykonując podobne obliczenia dowodzimy, że $\sphericalangle YQJ = 45^\circ + \frac{\beta}{2} = \sphericalangle QJY$. Zatem trójkąt QYJ jest równoramienny i $QY = JY$.

Podsumowując, wykazaliśmy, że $CY = PY = QY = IY = JY$. Stąd pięciokąt $CPIJQ$ jest wpisany w okrąg o środku Y i promieniu CY.

12. Dane są dodatnie liczby całkowite k, n tej samej parzystości. Na okręgu zaznaczono $2n$ punktów. Narysowano k cięciw tego okręgu o obu końcach wśród zaznaczonych punktów, przy czym każdy punkt jest końcem nieparzyście wielu cięciw. Każdemu z zaznaczonych punktów chcemy przypisać jeden z numerów $1, 2, \ldots, 2n$, przy czym różnym punktom chcemy przypisać różne numery. Punkt o numerze v nazwiemy *cudownym*, jeśli jest połączony cięciwami z parzyście wieloma punktami o numerach mniejszych od v. Wykazać, że numery można przypisać w taki sposób, aby dokładnie n punktów było cudownych.

Autor zadania: Daniel Goc

Rozwiązanie:

Poczynimy kilka obserwacji, z których następnie wywnioskujemy tezę zadania.

Obserwacja 1. Dla dowolnego numerowania liczba cudownych punktów ma tę samą parzystość co n.

Dowód. Każda cięciwa ma dwa końce — jeden o mniejszym numerze od drugiego. Każdy cudowny punkt jest końcem o mniejszym numerze nieparzyście wielu cięciw, a pozostałe punkty są końcami o mniejszym numerze parzyście wielu cięciw. Widzimy więc, że jeśli c jest liczbą cudownych punktów, to k jest sumą c liczb nieparzystych oraz $2n - c$ liczb parzystych. Stąd natychmiast wynika, że liczby c i k są tej samej parzystości. Z założeń zadania mamy, że k i n są tej samej parzystości. Stąd c i n są tej samej parzystości.

Powiemy, że punkt A jest *sąsiadem* punktu B jeśli A i B są połączone cięciwą.

Obserwacja 2. Istnieje numerowanie, dla którego co najwyżej n punktów jest cudownych. Istnieje także numerowanie, dla którego co najmniej n punktów jest cudownych.

Dowód. Ustalmy dowolne numerowanie. Dla każdego $i = 1, 2, \ldots, 2n$ zastąpmy numer i numerem $2n + 1 - i$. Otrzymujemy w ten sposób nowe numerowanie. Rozważmy dowolny punkt A i powiedzmy, że w początkowym numerowaniu przypisano mu numer v. Dowolny sąsiad A o numerze $w < v$ ma w nowym numerowaniu większy numer od A, bo $2n + 1 - w > 2n + 1 - v$. Podobnie, dowolny sąsiad A o numerze $w > v$ ma w nowym numerowaniu mniejszy numer od A, gdyż $2n + 1 - w < 2n + 1 - v$. Jeśli więc A w początkowym numerowaniu miał a sąsiadów o mniejszych numerach i b sąsiadów o większych numerach, to w nowym numerowaniu ma b sąsiadów o mniejszych numerach i a sąsiadów o większych numerach. Z założeń zadania liczba $a + b$ jest nieparzysta, więc liczby a i b są różnej parzystości. Stąd wniosek, że jeśli A był cudowny, to po zmianie numerowania przestaje być cudowny, a jeśli A nie był cudowny, to w nowym numerowaniu staje się cudowny. Stąd jeśli początkowe numerowanie miało c cudownych punktów, to zmienione numerowanie ma $2n-c$ cudownych punktów. Zatem jedno z tych numerowań ma co najwyżej n cudownych punktów, a drugie co najmniej n cudownych punktów.

Ruchem nazwiemy zamianę miejscami numerów $i, i + 1$ dla pewnego $i = 1, 2, \ldots, 2n - 1$.

Obserwacja 3. Po wykonaniu dowolnego ruchu liczba cudownych punktów albo zmniejsza się o 2 albo zwiększa się o 2 albo nie zmienia się.

Dowód. Powiedzmy, że punkt A ma numer i, a punkt B — numer $i+1$. Rozważmy ruch polegający na zamianie miejscami numerów $i, i+1$. Popatrzmy na punkt C różny od A i B; niech v będzie jego numerem. Ponieważ $v > i$ wtedy i tylko wtedy gdy $v > i + 1$, więc wykonanie ruchu nie zmienia liczby sąsiadów C o numerach mniejszych od v. To znaczy: jeśli C był cudowny, to po wykonaniu ruchu pozostaje cudowny, a jeśli C nie był cudowny, to po wykonaniu ruchu wciąż nie jest cudowny.

Zbadajmy teraz co się dzieje z punktami A i B. Dowolny sąsiad A różny od B o numerze mniejszym od i będzie nadal miał po wykonaniu ruchu mniejszy numer niż A (bo numer A wzrośnie o 1). Dowolny sąsiad B różny od A mający numer mniejszy od $i + 1$ musi mieć numer mniejszy od i (bo A ma numer i), więc po wykonaniu ruchu wciąż będzie sąsiadem B o niższym numerze (bo nowym numerem B będzie i).

Jeżeli wśród narysowanych cięciw nie ma odcinka AB, to punkty A i B po wykonaniu ruchu mają dokładnie tych samych sąsiadów o mniejszych numerach co przed wykonaniem ruchu. Ich stan cudowności, a zarazem liczba cudownych punktów, nie zmieni się.

Jeśli wśród narysowanych cięciw występuje AB, to po wykonaniu ruchu punkt B staje się sąsiadem A o mniejszym numerze, a punkt A przestaje być sąsiadem B o mniejszym numerze. Dla obu punktów A i B liczba sąsiadów o mniejszych numerach zmieni swą parzystość, więc punkty A i B zmienią stan cudowności na przeciwny. To znaczy, że albo oba przestaną być cudowne (wtedy liczba cudownych punktów zmniejszy się o 2) albo oba zaczną być cudowne (wtedy liczba cudownych punktów zwiększy się o 2) albo jeden stanie się cudowny, a drugi przestanie taki być (wtedy liczba cudownych punktów nie zmieni się).

Obserwacja 4. Dla dowolnych dwóch numerowań istnieje skończony ciąg ruchów zmieniający jedno numerowanie na drugie.

Dowód. Opiszemy algorytm pozwalający znaleźć szukany ciąg ruchów.

(i) Jeśli obecne numerowanie jest takie samo jak docelowe, kończymy działanie algorytmu. W przeciwnym razie przechodzimy do punktu (ii).

(ii) Znajdujemy największy numer, który nie znajduje się w obecnym numerowaniu w docelowym wierzchołku. Taki numer istnieje, bo obecne numerowanie różni się od docelowego. Oznaczmy ten numer oraz jego docelowy wierzchołek odpowiednio przez i i A. Niech j będzie obecnym numerem wierzchołka A. Wtedy $j < i$. Wykonajmy kolejno następujące ruchy: zamiana numerów j, $j + 1$, zamiana numerów $j + 1$, $j + 2$, zamiana numerów $j + 2$, $j + 3$, …, zamiana numerów $i - 1$, i. Następnie przechodzimy do punktu (i).

Prześledźmy procedurę opisaną w punkcie (ii). Numery większe od i są już przypisane docelowym wierzchołkom, a numer i nie. Po zamianie numerów j, $j + 1$ wierzchołek A ma numer $j + 1$. Po kolejnej zamianie ma on numer $j + 2$, i tak dalej: po ostatniej zamianie numer i znajdzie się w docelowym wierzchołku A. Wykonywane ruchy nie zmieniały oczywiście numerów wierzchołków o numerach większych od i.

Zatem po zakończeniu procedury opisanej w punkcie (ii) numery $i, i+1, \ldots, 2n$ będą już w docelowych wierzchołkach.

Powyższa analiza oznacza, że punkt (ii) zostanie wykonany co najwyżej $2n$ razy. Po jego ostatnim wykonaniu przechodzimy do punktu (i) i algorytm kończy swoje działanie. Tak otrzymany ciąg ruchów zmienia początkowe numerowanie na docelowe.

Przejdźmy do rozwiązania zadania. Ustalmy numerowanie Φ o co najwyżej n cudownych punktach oraz numerowanie Ψ o co najmniej n cudownych punktach. Takie numerowania istnieją na mocy Obserwacji 2. Ustalmy skończony ciąg ruchów, który zamienia Φ na Ψ. Takie ruchy istnieją na mocy Obserwacji 4. Zacznijmy wykonywać kolejne ruchy startując od numerowania Φ, ale zakończmy wykonywanie ruchów w najwcześniejszym momencie, w którym liczba cudownych punktów jest nie mniejsza od n. Taki moment istnieje, bo końcowe numerowanie Ψ ma co najmniej n punktów. Z Obserwacji 3 wynika, że w tym momencie liczba cudownych punktów wynosi n lub $n+1$. Liczby $n, n+1$ są różnej parzystości, więc z Obserwacji 1 wynika, że liczbą cudownych punktów nie może być $n+1$. W takim razie w tym momencie liczba cudownych punktów wynosi dokładnie n, co kończy rozwiązanie zadania.