LXXIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia trzeciego
30 marca 2022 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AB < AC$. Dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie D oraz okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie M różnym od A. Punkty X i Y wybrano tak, że $MX \perp AB$, $BX \perp MB$, $MY \perp AC$ oraz $CY \perp MC$. Dowieść, że punkty X, D, Y leżą na jednej prostej.

2. Dane są liczby całkowite $m, n \geqslant 2$. Wykazać, że istnieją takie dodatnie liczby całkowite $a_1 < a_2 < \ldots < a_m$, że dla dowolnych liczb całkowitych $1 \leqslant i < j \leqslant m$ liczba $\dfrac{a_j}{a_j - a_i}$ jest całkowita i podzielna przez n.

3. Na okręgu zaznaczono n punktów i narysowano pewną liczbę cięciw o obu końcach w zaznaczonych punktach. Spełniona jest przy tym następująca własność: po wymazaniu dowolnych 2021 z narysowanych cięciw dowolne dwa zaznaczone punkty można połączyć łamaną złożoną z niewymazanych cięciw. Udowodnić, że można wymazać niektóre z cięciw w taki sposób, że na rysunku zostanie co najwyżej $2022n$ cięciw oraz wyżej opisana własność zostanie zachowana.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.

LXXIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia trzeciego
31 marca 2022 r. (drugi dzień zawodów)

4. Znaleźć wszystkie trójki liczb rzeczywistych (a, b, c) spełniające układ równań

$$\begin{cases} a^3 + b^2c = ac \\ b^3 + c^2a = ba \\ c^3 + a^2b = cb \end{cases}$$

5. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB < AC$. Punkt M jest środkiem boku BC. Punkt P leży na odcinku AB i spełnia nierówność $AP > PB$. Punkt Q leży na odcinku AC, przy czym $\sphericalangle MPA = \sphericalangle AQM$. Symetralne odcinków BC i PQ przecinają się w punkcie S. Udowodnić, że $\sphericalangle BAC + \sphericalangle QSP = \sphericalangle QMP$.

6. Dana jest liczba pierwsza p oraz dodatnia liczba całkowita n. Udowodnić, że każdą z liczb $1, 2, \ldots, p-1$ można pokolorować na jeden z $2n$ kolorów tak, aby dla dowolnego $i = 2, 3, \ldots, n$ suma dowolnych i liczb tego samego koloru była niepodzielna przez p.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.