LXXIV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego I seria: do 17 października 2022 r.

1. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite n, dla których istnieją takie liczby $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \{-1, 1\}$, że

$$1 \cdot s_1 + 2 \cdot s_2 + \ldots + n \cdot s_n = 0.$$

2. Znaleźć wszystkie trójki liczb rzeczywistych (a, b, c) spełniające układ równań

$$\begin{cases} a^2 + 4ab + b^2 = 1 \\ b^2 + 4bc + c^2 = 1 \\ c^2 + 4ca + a^2 = -2 \end{cases}$$

3. Dany jest trójkąt ABC. Okrąg styczny do boku AC oraz do przedłużeń boków AB, BC ma promień długości r_1. Okrąg styczny do boku BC oraz do przedłużeń boków AB, AC ma promień długości r_2. Udowodnić, że jeżeli $r_1 + r_2 = AB$, to trójkąt ABC jest prostokątny.

4. Wyznaczyć wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych (m, n) o następującej własności: w każde pole nieskończonej szachownicy można wpisać liczbę ze zbioru $A = \{1, 2, \ldots, mn\}$ w taki sposób, że w każdym prostokącie o wymiarach $m \times n$ lub $n \times m$ (składającym się z mn pól) każda liczba ze zbioru A występuje dokładnie raz.

Uwaga: ***W tym roku szkolnym zadania zawodów pierwszego stopnia OM będą publikowane sukcesywnie: pierwsza seria 1 września 2022 r., druga seria 30 września 2022 r., a trzecia seria 28 października 2022 r.***

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

17 października 2022 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane. Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.

LXXIV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego
II seria: do 7 listopada 2022 r.

5. Rozstrzygnąć, czy istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb całkowitych, których nie można przedstawić w postaci $n^2 + p$, gdzie n jest liczbą całkowitą, a p liczbą pierwszą.

6. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ wpisany w okrąg. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie P, przy czym $BP = AD + DC$. Punkt X leży na boku BC, przy czym $BX = AC$. Dowieść, że $2\sphericalangle BPX = \sphericalangle ADC$.

7. Udowodnić, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych zachodzi nierówność

$$\sqrt{ab^2(b+c)}+\sqrt{bc^2(c+a)}+\sqrt{ca^2(a+b)} \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{(a+b+c)^4-(a^2+b^2+c^2)^2}.$$

8. Dany jest okrąg, w którym zaznaczono pewną skończoną liczbę cięciw. Łamaną zamkniętą złożoną z co najmniej trzech parami różnych zaznaczonych cięciw nazwiemy *cyklem*. Łamane uznajemy za takie same wtedy i tylko wtedy, gdy składają się z tego samego zbioru cięciw. Okazało się, że istnieje cykl $\mathcal{C}$ złożony z 2022 cięciw o następującej własności: każdy cykl ma co najmniej jedną wspólną cięciwę z cyklem $\mathcal{C}$. Wyznaczyć największą możliwą liczbę cykli.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

7 listopada 2022 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane. Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.

LXXIV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego
III seria: do 30 listopada 2022 r.

9. Załóżmy, że $2(a^2 + b^2 + c^2) = 5(ab + bc + ca) = d$ dla pewnych liczb całkowitych a, b, c, d. Udowodnić, że $10d$ jest kwadratem liczby całkowitej.

10. Dany jest różnoboczny trójkąt ostrokątny ABC wpisany w okrąg Ω. Punkt M jest środkiem dłuższego łuku BC okręgu Ω, a punkt N — środkiem krótszego łuku BC okręgu Ω. Symetralna odcinka AN przecina odcinki AB i AC odpowiednio w punktach X i Y. Oznaczmy przez Z różny od N punkt przecięcia okręgu Ω i okręgu opisanego na trójkącie NXY. Dowieść, że prosta MZ przechodzi przez ortocentrum trójkąta ABC.

11. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 2$. Dodatnie liczby rzeczywiste $a_1, \ldots, a_n$ spełniają równość $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = n$. Oznaczmy przez A zbiór tych indeksów $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, dla których $a_i \geqslant 2$. Udowodnić, że

$$n \cdot \sum_{i \in A} a_i^2 + 4 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2 \leqslant 4n^2.$$

12. Gra w (n, k)-*kamienie* rozgrywana jest na prostokątnej planszy składającej się z n pól ustawionych w rzędzie. Na początku gry na k-tym polu od lewej znajduje się kamień, a pozostałe pola są puste. Pojedyncza tura przebiega następująco. Na każdym kamieniu na planszy stawiamy kropkę. Następnie kładziemy kamień (bez kropki) na każdym polu sąsiadującym z dokładnie jednym polem, na którym znajduje się kamień z kropką. Na koniec tury zdejmujemy z planszy wszystkie kamienie z kropką. Gra kończy się porażką, jeżeli na planszy nie pozostały żadne kamienie. Znaleźć wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych (n, k), dla których gra w (n, k)-kamienie nigdy nie zakończy się porażką, niezależnie od tego ile tur rozegramy.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

30 listopada 2022 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane. Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.

Adresy Komitetów Okręgowych Olimpiady Matematycznej

- Dla województwa pomorskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego,
ul. Wita Stwosza 57, 80–952 Gdańsk.
- Dla województwa śląskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego,
ul. Bankowa 14, 40-007 Katowice.
- Dla województwa małopolskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego,
ul. Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków.
- Dla województwa lubelskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej,
pl. M. Curie-Skłodowskiej 1, 20-031 Lublin
- Dla województwa łódzkiego i świętokrzyskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego,
ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.
- Dla województwa wielkopolskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Adama Mickiewicza,
ul. Uniwersytetu Poznańskiego 4, 61-614 Poznań.
- Dla województwa podkarpackiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyczno–Przyrodniczy, Uniwersytetu Rzeszowskiego
ul. Pigonia 1, 35-310 Rzeszów.
- Dla województwa lubuskiego i zachodniopomorskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Szczecińskiego,
ul. Wielkopolska 15, 70-451 Szczecin.
- Dla województwa kujawsko-pomorskiego i warmińsko-mazurskiego:
— Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.
- Dla województwa mazowieckiego i podlaskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk,
ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa.
- Dla województwa dolnośląskiego i opolskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego,
pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: `https://om.mimuw.edu.pl`