LXXIV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia pierwszego

1. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite n, dla których istnieją takie liczby $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \{-1, 1\}$, że

$$1 \cdot s_1 + 2 \cdot s_2 + \ldots + n \cdot s_n = 0.$$

Autor zadania: Piotr Nayar

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Liczby n postaci $4k+3$ i $4k+4$ dla $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Na początek zauważmy, że gdy n jest postaci $4k+1$ lub $4k+2$ dla pewnego całkowitego k, to dla dowolnego wyboru liczb $s_1, s_2, \ldots, s_n$ w sumie

$$1 \cdot s_1 + 2 \cdot s_2 + \ldots + n \cdot s_n$$

występuje dokładnie $2k+1$ nieparzystych składników, wobec czego cała suma jest liczbą nieparzystą. Liczby n postaci $4k+1$ i $4k+2$ nie spełniają więc warunków zadania.

Udowodnimy, że jeśli dla jakiejś liczby $n \in \mathbb{N}$ istnieją takie liczby $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \{-1, 1\}$, że $1 \cdot s_1 + 2 \cdot s_2 + \ldots + n \cdot s_n = 0$, to istnieją też takie liczby dla $n+4$. Wystarczy przyjąć $s_{n+1} = s_{n+4} = 1$ oraz $s_{n+2} + s_{n+3} = -1$, bo $(n+1) - (n+2) - (n+3) + (n+4) = 0$.

Teza zachodzi dla $n = 3$, bo $1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 = 0$. Zachodzi też dla $n = 4$, bo $1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 0$. Teza zachodzi więc dla każdej liczby postaci $4k+3$ i każdej liczby postaci $4k+4$, gdzie k oznacza dowolną całkowitą liczbę nieujemną.

Uwaga. Liczby $s_1, s_2, \ldots, s_n$ można dobierać na wiele różnych sposobów. Na przykład, jeżeli $n = 4k-1$ dla pewnego $k = 1, 2, \ldots$, to możemy wziąć

$$s_i = \begin{cases} 1 & \text{dla } i \in \{1, 2, 3, \ldots, k-1, 3k, 3k+1, \ldots, 4k-2, 4k-1\} \\ -1 & \text{dla } i \in \{k, k+1, \ldots, 3k-1\} \end{cases}.$$

Wówczas

$$1 \cdot s_1 + 2 \cdot s_2 + \ldots + n \cdot s_n = A - B + C,$$

gdzie

$$A = 1 + 2 + \ldots + (k-1) = \frac{(k-1)k}{2},$$

$$B = k + (k+1) + \ldots + (3k-1) = \frac{2k(4k-1)}{2} = k(4k-1),$$

$$C = 3k + (3k+1) + \ldots + (4k-1) = \frac{k(7k-1)}{2}.$$

(Powyższe równości wynikają ze wzoru na sumę ciągu arytmetycznego.) Stąd

$$A - B + C = k \cdot \left(\frac{k-1}{2} - (4k-1) + \frac{7k-1}{2}\right) = 0.$$

Jeżeli $n = 4k$ dla pewnego $k = 1, 2, \ldots$, to możemy wybrać

$$s_i = \begin{cases} 1 & \text{dla } i \in \{1, 2, 3, \ldots, k, 3k+1, 3k+2, \ldots, 4k\} \\ -1 & \text{dla } i \in \{k+1, k+2, \ldots, 3k\} \end{cases}.$$

Analogicznie jak wyżej widzimy, że

$$1 \cdot s_1 + 2 \cdot s_2 + \ldots + n \cdot s_n = A - B + C,$$

gdzie

$$A = 1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2},$$

$$B = (k+1) + (k+2) + \ldots + 3k = \frac{2k(4k+1)}{2} = k(4k+1),$$

$$C = (3k+1) + (3k+2) + \ldots + 4k = \frac{k(7k+1)}{2}.$$

Stąd

$$A - B + C = k \cdot \left(\frac{k+1}{2} - (4k+1) + \frac{7k+1}{2}\right) = 0.$$

2. Znaleźć wszystkie trójki liczb rzeczywistych (a, b, c) spełniające układ równań

$$\begin{cases} a^2 + 4ab + b^2 = 1 \\ b^2 + 4bc + c^2 = 1 \\ c^2 + 4ca + a^2 = -2 \end{cases}$$

Autor zadania: Tomasz Cieśla

Rozwiązanie:

Odpowiedź: $(a, b, c) = (1, 0, -1)$ i $(a, b, c) = (-1, 0, 1)$.

Porównując lewe strony pierwszego i drugiego równania otrzymujemy $a^2 + 4ab = 4bc + c^2$, skąd

$$0 = a^2 - c^2 + 4ab - 4bc = (a - c)(a + c + 4b).$$

Jeśli $a - c = 0$, to $a = c$ i trzecie równanie przyjmuje postać $6a^2 = -2$. To jest sprzeczność, bo kwadrat liczby rzeczywistej nie może być ujemny. W takim razie $a - c \neq 0$, wobec czego $a + c + 4b = 0$.

Z drugiej strony, dodając stronami wszystkie trzy równania dostajemy $2(a + b + c)^2 = 0$, skąd $a + b + c = 0$.

Otrzymane związki dają $3b = (a + c + 4b) - (a + b + c) = 0 - 0 = 0$, więc $b = 0$. Stąd $a + c = 0$, tj. $c = -a$. Pierwsze równanie redukuje się do $a^2 = 1$, skąd $a = 1$ lub $a = -1$. Otrzymaliśmy dwie możliwe trójki: $(a, b, c) = (1, 0, -1)$ i $(a, b, c) = (-1, 0, 1)$. Bezpośrednie sprawdzenie pokazuje, że obie spełniają wyjściowy układ równań.

3. Dany jest trójkąt ABC. Okrąg styczny do boku AC oraz do przedłużeń boków AB, BC ma promień długości r_1. Okrąg styczny do boku BC oraz do przedłużeń boków AB, AC ma promień długości r_2. Udowodnić, że jeżeli $r_1 + r_2 = AB$, to trójkąt ABC jest prostokątny.

Autor zadania: Dominik Burek

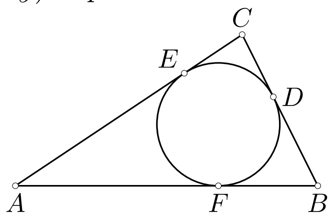
Rozwiązanie:

Przedstawimy kilka sposobów rozwiązania. Najpierw jednak sformułujemy i udowodnimy dwa pomocnicze stwierdzenia, z których będziemy korzystać. Dla skrócenia zapisu będziemy oznaczać $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

Lemat 1. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Wówczas

$$AE = AF = p - a,\ BD = BF = p - b,\ CD = CE = p - c.$$

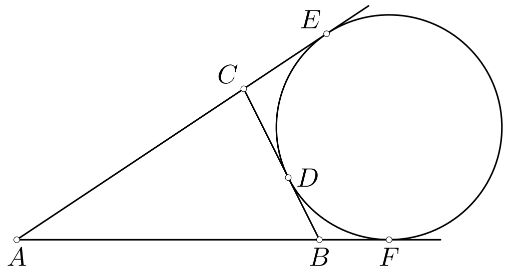
Dowód. Oznaczmy $x = AE = AF$, $y = BD = BF$, $z = CD = CE$. Wówczas $a = y+z$, $b = x+z$ i $c = x+y$. Po dodaniu stronami tych trzech równości dostajemy $a+b+c = 2(x+y+z)$, skąd $p = x+y+z$. W takim razie $x = (x+y+z) - (y+z) = p - a$, $y = (x+y+z) - (x+z) = p - b$ i $z = (x+y+z) - (x+y) = p - c$.



Lemat 2. Dany jest trójkąt ABC. Okrąg o jest styczny do boku BC w punkcie D oraz do przedłużeń boków AC i AB odpowiednio w punktach E i F. Wówczas

$$AE = AF = p,\ BD = BF = p - c,\ CD = CE = p - b.$$

Dowód. Oznaczmy $x = AE = AF$, $y = BD = BF$, $z = CD = CE$. Wówczas $a = y + z$, $b = x - z$ i $c = x - y$. Po dodaniu stronami tych trzech równości dostajemy $a + b + c = 2x$, skąd $p = x$. W takim razie $y = x - c = p - c$ i $z = x - b = p - b$.



Przejdźmy do rozwiązania zadania.

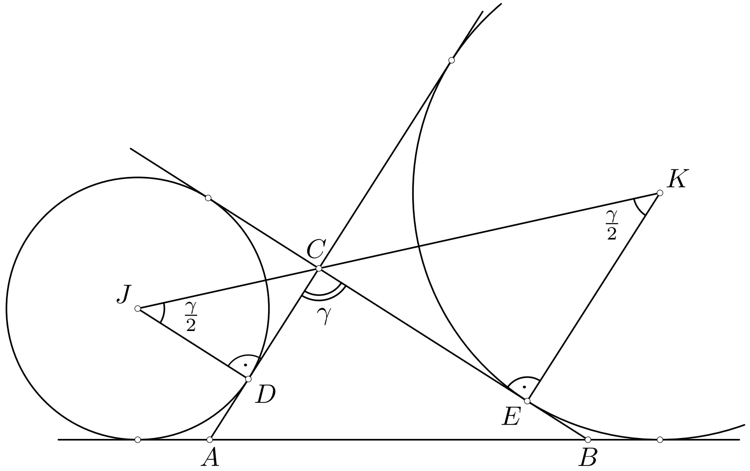
Sposób 1. Oznaczmy środek okręgu stycznego do boku AC i przedłużeń boków AB, BC przez J, oraz środek okręgu stycznego do boku BC i przedłużeń boków AB, AC przez K. Niech D będzie punktem styczności pierwszego okręgu z bokiem AC, a E — punktem styczności drugiego okręgu z bokiem BC. Z Lematu 2. wynika, że $CD = p - a$ oraz $CE = p - b$, więc $CD + CE = 2p - a - b = c$. Z drugiej strony, oznaczając $\sphericalangle ACB = \gamma$, mamy

$$\sphericalangle JCD = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} = \sphericalangle ECK,$$

więc $\sphericalangle DJC = \frac{\gamma}{2} = \sphericalangle CKE$. Stąd $r_1 = CD \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$ i $r_2 = CE \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$. Po dodaniu stronami otrzymujemy

$$r_1 + r_2 = (CD + CE) \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = c \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}.$$

Jeśli więc $r_1 + r_2 = c$, to $\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = 1$. Ponieważ $0 < \frac{\gamma}{2} < 90^\circ$, więc $\frac{\gamma}{2} = 45^\circ$, tj. $\gamma = 90^\circ$.



Sposób 2. Przyjmijmy oznaczenia punktów J, K, D, E jak w sposobie pierwszym. Obierzmy na boku AB taki punkt F, że $AF = r_1$. Wówczas z równości $r_1 + r_2 = AB$ wynika, że $BF = r_2$. Z Lematu 2. wynika, że $AD = p - c = BE$. Niech I będzie takim punktem leżącym po tej samej stronie prostej AB co C, że $IF \perp AB$ i $IF = p - c$. Wówczas z cechy przystawania bok-kąt-bok wynika, że $\triangle JDA \equiv \triangle AFI$ oraz $\triangle BEK \equiv \triangle IFB$. Mamy

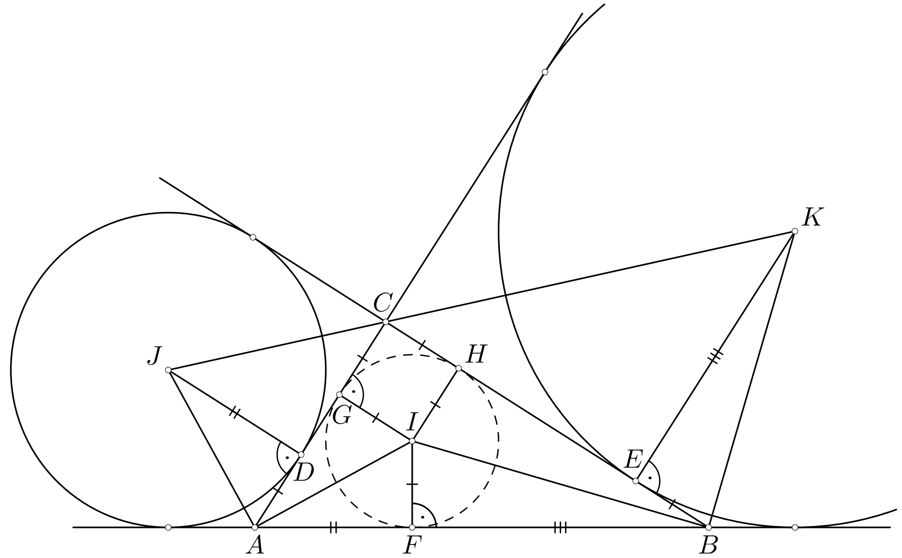
$$\sphericalangle FAI = \sphericalangle AJD = 90^\circ - \sphericalangle DAJ = 90^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle BAC) = \frac{1}{2}\sphericalangle BAC,$$

więc AI jest dwusieczną kąta BAC. Analogicznie,

$$\sphericalangle IBF = \sphericalangle EKB = 90^\circ - \sphericalangle KBE = 90^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle CBA) = \frac{1}{2}\sphericalangle CBA,$$

więc BI jest dwusieczną kąta CBA. W takim razie I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, a F — jego punktem styczności z bokiem AB. Oznaczmy punkty styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC z bokami AC i BC odpowiednio przez G i H. Z Lematu 1. wynika, że $CH = CG = p - c = IG = IH$. Czworokąt $CGIH$ jest więc rombem. Stąd

$$\sphericalangle ACB = 180^\circ - \sphericalangle IGC = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$



Sposób 3. Spróbujmy wyrazić r_1 i r_2 w zależności od a, b, c. Przyjmijmy oznaczenia punktów J i K jak w sposobie pierwszym. Kwadratowe nawiasy oznaczać będą pole figury. Wysokości trójkątów ABJ, BCJ i ACJ opuszczone z wierzchołka J mają długość r_1. W takim razie

$$[ABC] = [ABJ] + [BCJ] - [ACJ] = \frac{cr_1}{2} + \frac{ar_1}{2} - \frac{br_1}{2} = (p - b)r_1.$$

Analogicznie, wysokości trójkątów ABK, ACK i CBK mają długość r_2, więc

$$[ABC] = [ABK] + [ACK] - [CBK] = \frac{cr_2}{2} + \frac{br_2}{2} - \frac{ar_2}{2} = (p - a)r_2.$$

Wobec tego

$$r_1 + r_2 = \frac{[ABC]}{p-b} + \frac{[ABC]}{p-a} = [ABC] \cdot \left(\frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-a}\right)$$
$$= [ABC] \cdot \frac{(p-a)+(p-b)}{(p-b)(p-a)} = [ABC] \cdot \frac{c}{(p-b)(p-a)}.$$

Z założenia $r_1+r_2 = c$ wynika więc, że $(p-b)(p-a) = [ABC]$. Ze wzoru Herona mamy

$$[ABC] = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

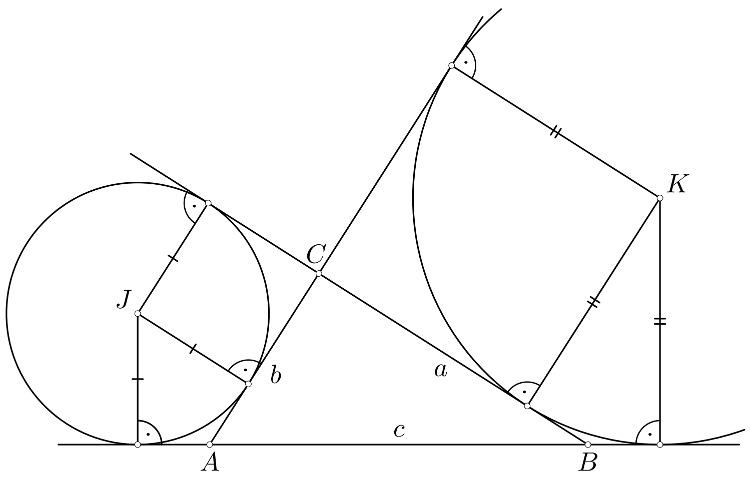
co w połączeniu z poprzednią równością daje

$$(p-b)(p-a) = p(p-c).$$

Po wymnożeniu mamy $p^2 - (a+b)p + ab = p^2 - pc$, więc

$$ab = p(a+b-c) = \frac{1}{2}(a+b+c)(a+b-c) = \frac{1}{2}((a+b)^2-c^2) = \frac{1}{2}(a^2+2ab+b^2-c^2).$$

Stąd $a^2 + b^2 = c^2$. Z twierdzenia Pitagorasa wynika więc, że kąt ACB jest prosty.



4. Wyznaczyć wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych (m,n) o następującej własności: w każde pole nieskończonej szachownicy można wpisać liczbę ze zbioru $A = \{1, 2, \ldots, mn\}$ w taki sposób, że w każdym prostokącie o wymiarach $m \times n$ lub $n \times m$ (składającym się z mn pól) każda liczba ze zbioru A występuje dokładnie raz.

Autorzy zadania: Marta i Michał Strzeleccy

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Pary (m,n), dla których m dzieli n lub n dzieli m.

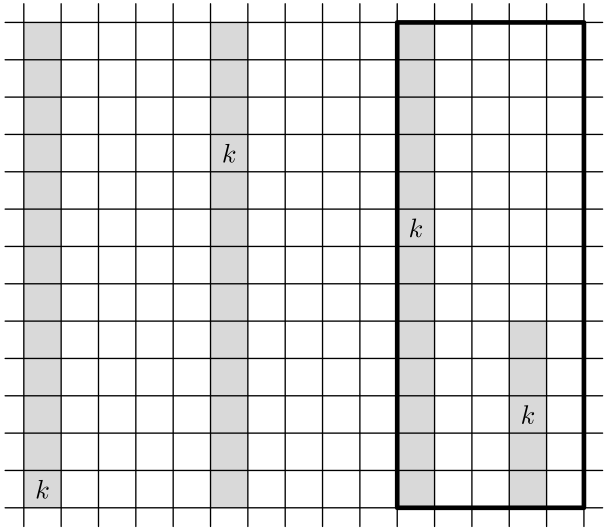
Załóżmy, że udało się wpisać liczby w żądany sposób. Pole w x-tej kolumnie i y-tym rzędzie będziemy nazywać *polem* (x,y).

Dla dowolnego y całkowitego rozważmy prostokąt $m \times n$, którego lewym dolnym polem jest pole $(y,1)$ oraz prostokąt $m \times n$, którego lewym dolnym polem jest pole $(y+1,1)$. Te dwa prostokąty mają $m-1$ wspólnych kolumn. Ponieważ oba prostokąty zawierają ten sam zestaw liczb, więc liczby w lewej skrajnej kolumnie pierwszego prostokąta są takie same jak liczby w prawej skrajnej kolumnie drugiego prostokąta. To znaczy, że liczby wpisane w pola $(y,1)$, $(y,2)$, $\ldots$, (y,n) są takie same jak liczby wpisane w pola $(y+m,1)$, $(y+m,2)$, $\ldots$, $(y+m,n)$.

Prowadząc analogiczne rozumowanie dla prostokątów $n \times m$ dowodzimy, że liczby wpisane w pola $(y,1), (y,2), \ldots, (y,m)$ są takie same jak liczby wpisane w pola $(y+n,1)$, $(y+n,2)$, $\ldots$, $(y+n,m)$.

Załóżmy, że żadna z liczb m,n nie jest dzielnikiem drugiej. Doprowadzimy do sprzeczności. Bez ograniczenia ogólności rozumowania załóżmy, że $m > n$. Zapiszmy $m = an+b$, gdzie a i b są liczbami całkowitymi i $1 \leqslant b \leqslant n-1$. Niech k będzie liczbą wpisaną w pole $(1,1)$. Korzystając wielokrotnie z poczynionej wcześniej obserwacji widzimy, że liczba k jest również wpisana w któreś z pól $(n+1,1)$, $(n+1,2)$, $\ldots$, $(n+1,m)$, w któreś z pól $(2n+1,1)$, $(2n+1,2)$, $\ldots$, $(2n+1,m)$, i tak dalej.

Liczba k jest zatem wpisana w któreś z pól $(an+1,1)$, $(an+1,2)$, $\ldots$, $(an+1,m)$, a także w któreś z pól $(m,1)$, $(m,2)$, $\ldots$, (m,n). Jednakże prostokąt $n \times m$, którego lewym dolnym polem jest pole $(an+1,1)$ przykrywa oba powyższe zestawy pól — zawiera więc liczbę k dwukrotnie, co daje sprzeczność. Zatem nie istnieje żądane wpisanie liczb gdy żadna z liczb m,n nie jest dzielnikiem drugiej.



Załóżmy teraz, że m dzieli się przez n (gdy n dzieli się przez m rozumowanie jest analogiczne). Wskażemy spełniające warunki zadania przyporządkowanie liczb.

Symbolem a mod b będziemy oznaczać resztę z dzielenia liczby a przez b. W pole (x,y) wpisujemy liczbę

$$f(x,y) = ((x-y) \bmod m)\cdot n + (y \bmod n) + 1.$$

Tak określona liczba jest w zbiorze A dla dowolnych x, y. Na rysunku przedstawiono wypełnienie planszy za pomocą powyższego wzoru dla $m = 6$ i $n = 2$.

9	11	1	3	5	7	9	11	1
12	2	4	6	8	10	12	2	4
1	3	5	7	9	11	1	3	5
4	6	8	10	12	2	4	6	8
5	7	9	11	1	3	5	7	9
8	10	12	2	4	6	8	10	12
9	11	1	3	5	7	9	11	1
12	2	4	6	8	10	12	2	4
1	3	5	7	9	11	1	3	5

Zauważmy, że $f(x,y) = f(x',y')$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą równości

$$y \bmod n = y' \bmod n \quad \text{oraz} \quad (x-y) \bmod m = (x'-y') \bmod m.$$

To zaś jest równoważne temu, że n dzieli liczbę $y-y'$ oraz m dzieli liczbę $x-y-(x'-y') = (x-x')-(y-y')$.

Wykażemy, że każdy prostokąt $m \times n$ przykrywa parami różne liczby. Należy pokazać, że jeśli $|x-x'| < m$, $|y-y'| < n$ i $f(x,y) = f(x',y')$, to $x = x'$ i $y = y'$. Na mocy obserwacji poczynionej powyżej, liczba $y-y'$ dzieli się przez n, a liczba $(x-x')-(y-y')$ dzieli się przez m. Jedyną liczbą o module mniejszym od n podzielną przez n jest 0 — zatem $y-y' = 0$. Wtedy $(x-x')-(y-y') = x-x'$ jest podzielną przez m liczbą o module mniejszym od m — zatem $x-x' = 0$. Ostatecznie $x = x'$ i $y = y'$.

Teraz wykażemy, że każdy prostokąt $n \times m$ przykrywa parami różne liczby. Należy pokazać, że z warunków $|x-x'| < n$, $|y-y'| < m$ i $f(x,y) = f(x',y')$ wynika, że $x = x'$ i $y = y'$. Analogicznie jak wyżej stwierdzamy, że $y-y'$ dzieli się przez n oraz że $(x-x')-(y-y')$ dzieli się przez m. Liczba m dzieli się przez n, więc n dzieli liczbę $(x-x')-(y-y')$, a skoro n dzieli $y-y'$, to musi też dzielić $x-x'$. Ponieważ $x-x'$ jest podzielną przez n liczbą o module mniejszym od n, więc $x-x' = 0$. Stąd wniosek, że liczba $(x-x')-(y-y')$ jest równa $y'-y$. Jest ona podzielna przez m i ma moduł mniejszy od m, więc $y'-y = 0$. Otrzymaliśmy zatem $x = x'$ i $y = y'$.

5. Rozstrzygnąć, czy istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb całkowitych, których nie można przedstawić w postaci $n^2 + p$, gdzie n jest liczbą całkowitą, a p liczbą pierwszą.

Autor zadania: Paweł Gadziński

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że dla dowolnej nieparzystej liczby $a \geqslant 3$ liczby $\left(\frac{3a+1}{2}\right)^2$ nie można przedstawić w żądanej postaci. To jest dodatnia liczba całkowita, bo licznik ułamka $\frac{3a+1}{2}$ jest parzysty i dodatni. Przypuśćmy nie wprost, że $\left(\frac{3a+1}{2}\right)^2 = n^2 + p$ dla pewnej liczby całkowitej n i pewnej liczby pierwszej p. Zamieniając w razie potrzeby n na $-n$, możemy założyć, że $n \geqslant 0$. Mamy

$$p = \left(\frac{3a+1}{2}\right)^2 - n^2 = \left(\frac{3a+1}{2} + n\right)\left(\frac{3a+1}{2} - n\right).$$

W powyższym iloczynie pierwszy czynnik jest dodatni, więc drugi też musi być dodatni. Liczba p jest pierwsza, więc powyższa równość może zajść jedynie wtedy, gdy czynniki są równe 1 i p. Ich suma z jednej strony jest równa $p+1$, a z drugiej $\left(\frac{3a+1}{2}+n\right)+\left(\frac{3a+1}{2}-n\right)=3a+1$. W konsekwencji $3a=p$. Otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż liczba $3a$ jest złożona, a liczba p — pierwsza.

6. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ wpisany w okrąg. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie P, przy czym $BP = AD + DC$. Punkt X leży na boku BC, przy czym $BX = AC$. Dowieść, że $2\sphericalangle BPX = \sphericalangle ADC$.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

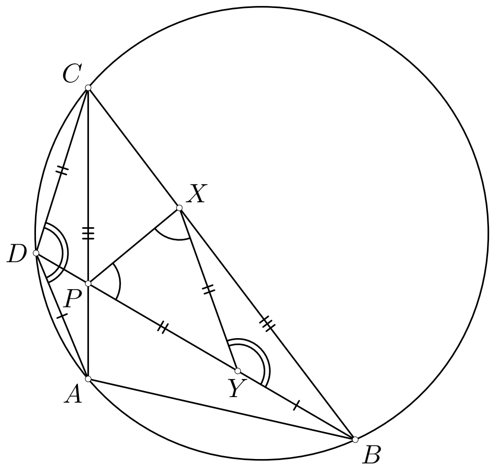
Obierzmy na odcinku BP taki punkt Y, że $BY = AD$. Kąty CAD i XBY są równe, bo są to kąty wpisane oparte na tym samym łuku okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$. Ponadto $AC = BX$ oraz $AD = BY$. Z cechy przystawania bok-kąt-bok wynika, że trójkąty ACD i BXY są przystające. W szczególności $CD = XY$. Zauważmy, że

$$PY = BP - BY = AD + DC - AD = CD = XY.$$

W konsekwencji trójkąt PXY jest równoramienny i $\sphericalangle YPX = \sphericalangle PXY$. Stąd

$$\sphericalangle ADC = \sphericalangle BYX = \sphericalangle YPX + \sphericalangle PXY = 2\sphericalangle BPX,$$

co było do udowodnienia.



7. Udowodnić, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych zachodzi nierówność

$$\sqrt{ab^2(b+c)}+\sqrt{bc^2(c+a)}+\sqrt{ca^2(a+b)} \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{(a+b+c)^4-(a^2+b^2+c^2)^2}.$$

Autor zadania: Piotr Nayar

Rozwiązanie:

Sposób 1. Oznaczmy lewą stronę i prawą stronę dowodzonej nierówności odpowiednio przez L i P. Korzystając ze wzoru

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$$

otrzymujemy $L^2 = A + 2B$, gdzie

$$A = ab^2(b+c)+bc^2(c+a)+ca^2(a+b)$$

oraz

$$B = \sqrt{ab^3c^2(b+c)(c+a)}+\sqrt{bc^3a^2(c+a)(a+b)}+\sqrt{ca^3b^2(a+b)(b+c)}.$$

Mamy też

$$\begin{aligned} P^2 &= \frac{1}{4}\left(((a+b+c)^2)^2-(a^2+b^2+c^2)^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left((a+b+c)^2+(a^2+b^2+c^2)\right)\left((a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\right)\\ &= (a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)(ab+bc+ca)\\ &= A+C+D, \end{aligned}$$

gdzie

$$C = a^2b(a+b)+b^2c(b+c)+c^2a(c+a)$$

oraz

$$D = abc(b+c)+abc(c+a)+abc(a+b).$$

Wystarczy więc udowodnić, że $2B \leqslant C + D$. Z nierówności między średnimi geometryczną i arytmetyczną wynika, że

$$2\sqrt{ab^3c^2(b+c)(c+a)} = 2\sqrt{b^2c(b+c)\cdot abc(c+a)} \leqslant b^2c(b+c)+abc(c+a),$$
$$2\sqrt{bc^3a^2(c+a)(a+b)} = 2\sqrt{c^2a(c+a)\cdot abc(a+b)} \leqslant c^2a(c+a)+abc(a+b),$$
$$2\sqrt{ca^3b^2(a+b)(b+c)} = 2\sqrt{a^2b(a+b)\cdot abc(b+c)} \leqslant a^2b(a+b)+abc(b+c).$$

Po dodaniu stronami powyższych nierówności otrzymujemy $2B \leqslant C+D$, co kończy dowód.

Sposób 2. Posłużymy się nierównością Cauchy'ego-Schwarza. Mówi ona, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ zachodzi nierówność

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2} \geqslant a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n.$$

Przyjmijmy $n = 3$ i połóżmy

$$a_1 = \sqrt{ab},\ a_2 = \sqrt{bc},\ a_3 = \sqrt{ca},$$

$$b_1 = \sqrt{b(b+c)},\ b_2 = \sqrt{c(c+a)},\ b_3 = \sqrt{a(a+b)}.$$

Wówczas

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 &= ab + bc + ca, \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca, \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 &= \sqrt{ab^2(b+c)} + \sqrt{bc^2(c+a)} + \sqrt{ca^2(a+b)}. \end{aligned}$$

Nierówność Cauchy'ego-Schwarza dla powyższego doboru liczb a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 wraz z przekształceniem prawej strony dowodzonej nierówności przedstawionym w sposobie pierwszym dowodzi więc tezy zadania.

8. Dany jest okrąg, w którym zaznaczono pewną skończoną liczbę cięciw. Łamaną zamkniętą złożoną z co najmniej trzech parami różnych zaznaczonych cięciw nazwiemy *cyklem*. Łamane uznajemy za takie same wtedy i tylko wtedy, gdy składają się z tego samego zbioru cięciw. Okazało się, że istnieje cykl $\mathcal{C}$ złożony z 2022 cięciw o następującej własności: każdy cykl ma co najmniej jedną wspólną cięciwę z cyklem $\mathcal{C}$. Wyznaczyć największą możliwą liczbę cykli.

Autor zadania: Daniel Goc

Rozwiązanie:

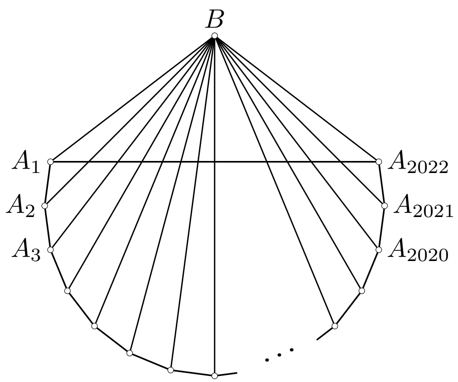
Dla każdego cyklu $\mathcal{A}$ będziemy oznaczać przez $f(\mathcal{A})$ zbiór wspólnych cięciw cykli $\mathcal{A}$ i $\mathcal{C}$. Z warunków zadania wynika, że dla dowolnego cyklu $\mathcal{A}$ zbiór $f(\mathcal{A})$ jest niepusty. Udowodnimy, że jeśli $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ są różnymi cyklami, to $f(\mathcal{A}) \neq f(\mathcal{B})$.

Załóżmy, że $f(\mathcal{A}) = f(\mathcal{B})$ dla pewnych dwóch różnych cykli $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. Udowodnimy, że istnieje cykl, który nie ma żadnej wspólnej cięciwy z cyklem $\mathcal{C}$, co da sprzeczność z warunkami zadania. Niech $\mathcal{D}$ będzie zbiorem tych cięciw, które występują w dokładnie jednym pośród cykli $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. Zbiór $\mathcal{D}$ jest niepusty, bo cykle $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ są różne. Ponadto $\mathcal{D}$ nie zawiera żadnej cięciwy z cyklu $\mathcal{C}$, bo $f(\mathcal{A}) = f(\mathcal{B})$. Zauważmy, że koniec dowolnego odcinka z dowolnego cyklu jest końcem parzyście wielu odcinków z tego cyklu. Wynika stąd, że koniec dowolnej cięciwy jest końcem parzyście wielu odcinków z $\mathcal{D}$ — w szczególności dowolny koniec odcinka z $\mathcal{D}$ jest końcem co najmniej dwóch odcinków z $\mathcal{D}$. Wybierzmy dowolny odcinek ze zbioru $\mathcal{D}$ i oznaczmy jego końce przez A_0 i A_1. W zbiorze $\mathcal{D}$ istnieje jakiś odcinek o końcu A_1 różny od A_0A_1. Wybierzmy jeden z takich odcinków i oznaczmy jego drugi koniec przez A_2. Podobnie rozumując, w $\mathcal{D}$ istnieje odcinek o końcu A_2 różny od A_1A_2. Wybierzmy dowolny z takich odcinków i oznaczmy jego drugi koniec przez A_3. Kontynuujemy to rozumowanie do momentu, w którym wybierzemy taki odcinek $A_{i-1}A_i$, że $A_i = A_j$ dla pewnego $j < i$. Wtedy łamana zamknięta $A_jA_{j+1}\ldots A_i$ jest cyklem niemającym żadnej wspólnej cięciwy z cyklem $\mathcal{C}$.

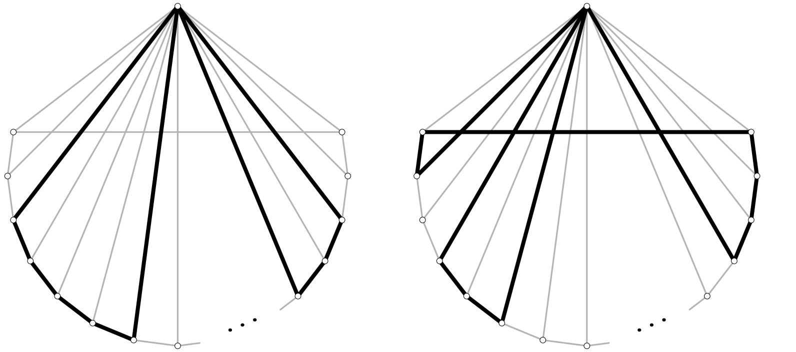
Udowodniliśmy więc, że różnym cyklom odpowiadają różne niepuste podzbiory zbioru cięciw tworzących cykl $\mathcal{C}$. Takich podzbiorów jest $2^{2022} - 1$. W takim razie liczba cykli to co najwyżej $2^{2022} - 1$. Pokażemy teraz, że to ograniczenie górne może być osiągnięte.

Rozważmy dowolne 2023 punkty $A_1, A_2, \ldots, A_{2022}, B$ na okręgu. Narysujmy cięciwy

$$A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{2021}A_{2022}, A_{2022}A_1, BA_1, BA_2, \ldots, BA_{2022}.$$



Wówczas cykl $\mathcal{C} = A_1A_2\ldots A_{2022}A_1$ ma własność opisaną w treści zadania. Pozostaje uzasadnić, że dla każdego niepustego podzbioru $\mathcal{X}$ zbioru cięciw tworzących cykl $\mathcal{C}$ istnieje cykl $\mathcal{A}$ taki, że $f(\mathcal{A}) = \mathcal{X}$.



Jeśli $\mathcal{X}$ składa się ze wszystkich cięciw cyklu $\mathcal{C}$, to $f(\mathcal{C}) = \mathcal{X}$. W przeciwnym razie cięciwy w zbiorze $\mathcal{X}$ tworzą łamane otwarte $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \ldots, \mathcal{L}_k$, przy czym końce wszystkich tych łamanych są różne, każda jest postaci $A_iA_{i+1}\ldots A_j$ dla pewnych $i < j$, być może poza jedną łamaną, która może być postaci $A_iA_{i+1}\ldots A_{2022}A_1\ldots A_j$ dla pewnych $i > j$. Wtedy cykl $\mathcal{A} = B\mathcal{L}_1B\mathcal{L}_2B\ldots B\mathcal{L}_kB$ spełnia $f(\mathcal{A}) = \mathcal{X}$.

9. Załóżmy, że $2(a^2+b^2+c^2) = 5(ab+bc+ca) = d$ dla pewnych liczb całkowitych a, b, c, d. Udowodnić, że $10d$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Autor zadania: Emil Łasocha

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) = \frac{1}{2}d + \frac{2}{5}d = \frac{9}{10}d.$$

Z tej równości wynika w szczególności, że $a+b+c$ dzieli się przez 3. W takim razie

$$10d = \frac{100}{9}(a+b+c)^2 = \left(\frac{10(a+b+c)}{3}\right)^2,$$

co dowodzi tezy.

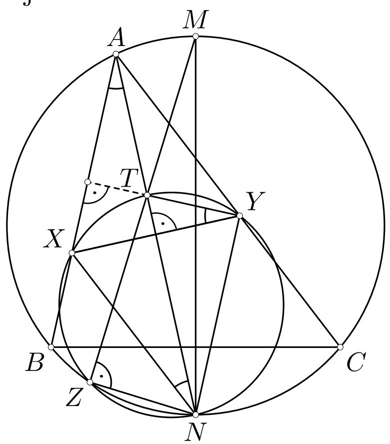
10. Dany jest różnoboczny trójkąt ostrokątny ABC wpisany w okrąg Ω. Punkt M jest środkiem dłuższego łuku BC okręgu Ω, a punkt N — środkiem krótszego łuku BC okręgu Ω. Symetralna odcinka AN przecina odcinki AB i AC odpowiednio w punktach X i Y. Oznaczmy przez Z różny od N punkt przecięcia okręgu Ω i okręgu opisanego na trójkącie NXY. Dowieść, że prosta MZ przechodzi przez ortocentrum trójkąta ABC.

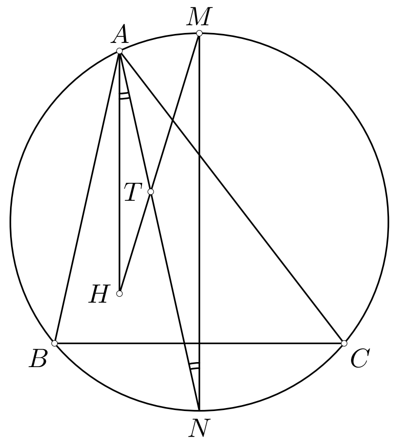
Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Zauważmy, że AN jest dwusieczną kąta XAY. Trójkąt XAY jest więc równoramienny. Poza tym prosta XY jest symetralną AN, więc A i N są symetryczne względem XY. Czworokąt $AXNY$ jest więc rombem.

Punkty M i N są środkami dłuższego łuku BC i krótszego łuku BC okręgu Ω, więc MN jest średnicą Ω. Oznaczmy przez T różny od Z punkt przecięcia prostej MZ z okręgiem opisanym na trójkącie NXY. Ponieważ $\sphericalangle NZT = \sphericalangle NZM = 90°$, więc NT jest średnicą tego okręgu. Ze względu na równoramienność trójkąta NXY punkt T leży na prostej AN.





Oznaczmy ortocentrum trójkąta ABC przez H. Aby udowodnić, że H leży na prostej MZ wystarczy udowodnić, że $\sphericalangle ATH = \sphericalangle NTM$, do czego z kolei wystarczy wykazać, że trójkąty AHT i NMT są podobne. Proste AH i MN są prostopadłe do BC, więc $AH \parallel MN$. Zatem $\sphericalangle HAT = \sphericalangle MNT$ i do zakończenia rozwiązania wystarczy udowodnić, że

$$\frac{AH}{AT} = \frac{MN}{NT} \qquad (*)$$

— żądane podobieństwo wyniknie wtedy z cechy bok-kąt-bok.

Zauważmy, że $\sphericalangle TYX = \sphericalangle TNX = \sphericalangle XAT = 90^\circ - \sphericalangle YXA$. Wynika stąd, że $YT \perp AX$. Wraz z $AN \perp XY$ oznacza to, że T jest ortocentrum trójkąta AXY.

Lemat. Jeśli H jest ortocentrum trójkąta ostrokątnego ABC wpisanego w okrąg o średnicy d, to $AH = d\cos(\sphericalangle BAC)$.

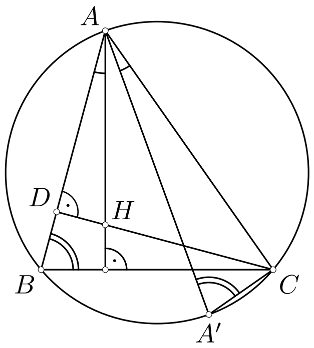
Dowód. Niech A' będzie takim punktem, że AA' jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie ABC. Niech D będzie spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka C. Mamy

$$\sphericalangle DAH = 90^\circ - \sphericalangle CBA = 90^\circ - \sphericalangle CA'A = \sphericalangle A'AC.$$

Trójkąty prostokątne ADH i ACA' są zatem podobne. Stąd

$$\frac{AH}{AA'} = \frac{AD}{AC} = \cos(\sphericalangle BAC),$$

co kończy dowód lematu.



Wróćmy do rozwiązania zadania. Średnica okręgu opisanego na trójkącie AXY jest równa średnicy okręgu opisanego na trójkącie NXY, bo trójkąty te są przystające. Jest ona zatem równa NT. Z lematu zastosowanego do trójkąta AXY mamy $AT = NT\cos(\sphericalangle XAY)$. Z drugiej strony, lemat zastosowany do trójkąta ABC daje $AH = MN\cos(\sphericalangle BAC)$. W takim razie

$$\frac{AH}{AT} = \frac{MN\cos(\sphericalangle BAC)}{NT\cos(\sphericalangle XAY)} = \frac{MN}{NT},$$

co dowodzi równości $(*)$, do której sprowadziliśmy tezę zadania.

11. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 2$. Dodatnie liczby rzeczywiste $a_1, \ldots, a_n$ spełniają równość $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = n$. Oznaczmy przez A zbiór tych indeksów $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, dla których $a_i \geqslant 2$. Udowodnić, że

$$n \cdot \sum_{i \in A} a_i^2 + 4 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leqslant 4n^2.$$

Autorzy zadania: Marta i Michał Strzeleccy

Rozwiązanie:

W rozwiązaniu skorzystamy z nierówności między średnią kwadratową i średnią arytmetyczną: dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}} \geqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Sposób 1. Na początek zauważmy, że gdy zbiór A jest pusty, to nierówność przyjmuje postać

$$4 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leqslant 4n^2 = 4n\sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

Po podzieleniu tej nierówności przez $4n^2$ i wzięciu pierwiastka otrzymujemy nierówność między średnią kwadratową i średnią arytmetyczną.

Będziemy od teraz zakładać, że zbiór A nie jest pusty. Oznaczmy przez B zbiór tych indeksów i, że $a_i < 2$. Zbiór B jest niepusty, bo w przeciwnym razie mielibyśmy $a_i \geqslant 2$ dla wszystkich $i = 1, 2, \ldots, n$, skąd $n = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geqslant 4n$ — sprzeczność. Oznaczmy $k = |A|$, $\ell = |B|$, oraz

$$x = \sqrt{\frac{\sum_{i\in A} a_i^2}{k}}, \qquad y = \sqrt{\frac{\sum_{i\in B} a_i^2}{\ell}}.$$

Wtedy $x \geqslant 2 > y > 0$, skąd w szczególności $x^2 - y^2 > 0$. Ponieważ $A \cup B = \{1, 2, \ldots, n\}$, więc $k + \ell = n$ oraz

$$n = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \sum_{i\in A} a_i^2 + \sum_{i\in B} a_i^2 = kx^2 + \ell y^2.$$

Traktując powyższe dwa związki jako równania liniowe zmiennych k, ℓ, wyznaczamy k i ℓ w zależności od n, x i y:

$$k = n \cdot \frac{1 - y^2}{x^2 - y^2}, \qquad \ell = n \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 - y^2}.$$

Ze wzoru na k wynika w szczególności, że $y < 1$. Z nierówności między średnią kwadratową i średnią arytmetyczną wynika, że

$$\sum_{i \in A} a_i \leqslant kx, \qquad \sum_{i \in B} a_i \leqslant \ell y.$$

W takim razie

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i \in A} a_i + \sum_{i \in B} a_i \leqslant kx + \ell y,$$

więc

$$n \cdot \sum_{i \in A} a_i^2 + 4 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2 \leqslant nkx^2 + 4(kx + \ell y)^2$$

i do dokończenia rozwiązania wystarczy dowieść, że

$$nkx^2 + 4(kx + \ell y)^2 \leqslant 4n^2 = 4n(kx^2 + \ell y^2).$$

Mamy

$$\begin{aligned} n(kx^2 + \ell y^2) - (kx + \ell y)^2 &= nkx^2 + n\ell y^2 - k^2x^2 - 2k\ell xy - \ell^2 y^2 \\ &= k(n-k)x^2 + \ell(n-\ell)y^2 - 2k\ell xy \\ &= k\ell(x^2 + y^2 - 2xy) = k\ell(x-y)^2. \end{aligned}$$

Wystarczy więc dowieść, że

$$nkx^2 \leqslant 4k\ell(x-y)^2.$$

Podstawiając za ℓ obliczoną wcześniej wartość i mnożąc obie strony nierówności przez $\dfrac{x+y}{nk}$, otrzymujemy równoważnie

$$x^2(x+y) \leqslant 4(x^2-1)(x-y).$$

Ponieważ $y < 1$ i $x \geqslant 2$, więc

$$\begin{aligned} 4(x^2-1)(x-y) - x^2(x+y) &= 3x^3 - 4x - y(5x^2 - 4) \\ &> 3x^3 - 4x - (5x^2 - 4) \\ &= (x-2)(3x^2 + x - 2) \\ &\geqslant 0, \end{aligned}$$

co kończy dowód.

Sposób 2. Niech s będzie średnią arytmetyczną liczb $a_1, \ldots, a_n$. Z nierówności między średnią kwadratową i średnią arytmetyczną wynika, że

$$1 = \sqrt{\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \geqslant s.$$

Wobec tego dla dowolnego $i \in A$ mamy

$$\frac{a_i}{2} = a_i - \frac{a_i}{2} \leqslant a_i - s.$$

Dla $i = 1, 2, \ldots, n$ oznaczmy

$$b_i = \begin{cases} \dfrac{a_i}{2} & \text{dla } i \in A \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Wówczas dla dowolnego $i = 1, 2, \ldots, n$ mamy

$$b_i^2 \leqslant (a_i - s)^2.$$

Rzeczywiście, jeśli $i \in A$, to wynika to bezpośrednio z poprzedniej nierówności i założenia o dodatniości a_i. Jeśli zaś $i \notin A$, to nierówność zachodzi, bo kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną.

Sumując powyższe nierówności dla $i = 1, 2, \ldots, n$ dostajemy

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} (a_i - s)^2.$$

Prawa strona powyższej nierówności jest równa

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} (a_i - s)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(a_i^2 - 2a_i s + s^2 \right) &= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2 \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) s + ns^2 \\ &= n - 2ns^2 + ns^2 = n - ns^2. \end{aligned}$$

W takim razie

$$n \cdot \sum_{i \in A} a_i^2 = 4n \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leqslant 4n^2 - 4n^2 s^2 = 4n^2 - 4 \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2,$$

co jest równoważne tezie zadania.

12. Gra w (n,k)-*kamienie* rozgrywana jest na prostokątnej planszy składającej się z n pól ustawionych w rzędzie. Na początku gry na k-tym polu od lewej znajduje się kamień, a pozostałe pola są puste. Pojedyncza tura przebiega następująco. Na każdym kamieniu na planszy stawiamy kropkę. Następnie kładziemy kamień (bez kropki) na każdym polu sąsiadującym z dokładnie jednym polem, na którym znajduje się kamień z kropką. Na koniec tury zdejmujemy z planszy wszystkie kamienie z kropką. Gra kończy się porażką, jeżeli na planszy nie pozostały żadne kamienie. Znaleźć wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych (n,k), dla których gra w (n,k)-kamienie nigdy nie zakończy się porażką, niezależnie od tego ile tur rozegramy.

Autor zadania: Jakub Onufry Wojtaszczyk

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Takie pary (n,k), że $n+1$ nie jest potęgą dwójki o wykładniku całkowitym dodatnim oraz k jest dowolną liczbą ze zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$.

Zauważmy, że po każdej turze wszystkie kamienie znajdują się na polach tej samej parzystości i parzystość ta zmienia się po każdej turze. Rzeczywiście, na początku gry ta własność zachodzi, bo jest tylko jeden kamień, a w każdej turze kamienie są dostawiane wyłącznie na pola sąsiadujące z tymi, na których stały kamienie przed wykonaniem tury.

Grę w $(1,1)$-kamienie przegrywamy po wykonaniu pierwszej tury. Jeżeli $2 \mid n$, to gry w (n,k)-kamienie nigdy nie przegramy. Rzeczywiście, skoro pierwsze i ostatnie pole są różnej parzystości, to na początku tury zawsze co najmniej jedno ze skrajnych pól planszy musi być puste. Dzięki temu w każdej turze zawsze możemy dostawić co najmniej jeden kamień bez kropki, gdyż jeśli np. ostatnie pole jest puste, to możemy dostawić kamień po prawej stronie kamienia z kropką znajdującego się najbardziej na prawo. Podobnie, jeśli pierwsze pole jest puste, to zawsze możemy dostawić kamień bez kropki po lewej stronie kamienia z kropką znajdującego się najbardziej na lewo.

Grę w (n,k)-kamienie możemy przeformułować w następujący sposób. Każdy możliwy stan gry na początku tury reprezentujemy przez n-elementowy ciąg zero-jedynkowy $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, przy czym dla dowolnego $i=1,2,\ldots,n$ równość $x_i=0$ oznacza, że i-te pole jest puste, a równość $x_i=1$ oznacza, że na i-tym polu stoi kamień. Wykonanie tury polega na przejściu ze stanu $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ do stanu $(x_2, x_1+x_3, x_2+x_4, \ldots, x_{n-2}+x_n, x_{n-1})$, gdzie dodawanie wykonujemy modulo 2 (czyli umawiamy się, że $1+1=0$). Stanem początkowym gry jest ciąg zero-jedynkowy, który na k-tej pozycji ma jedynkę, a na pozostałych pozycjach — zera. Grę przegrywamy wtedy i tylko wtedy, gdy po pewnej skończonej liczbie tur otrzymamy ciąg złożony z samych zer.

Zauważmy, że po wykonaniu dwóch tur w (n,k)-kamienie przechodzimy ze stanu $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ do stanu

$$(x_1+x_3, x_4, x_1+x_5, x_2+x_6, \ldots, x_{n-5}+x_{n-1}, x_{n-4}+x_n, x_{n-3}, x_{n-2}+x_n).$$

Stąd jeśli $n \geqslant 3$ i $2 \nmid n$, to wykonanie dwóch tur w grze w (n,k)-kamienie zmienia liczby $x_2, x_4, \ldots, x_{n-1}$ w taki sam sposób jak wykonanie pojedynczej tury dla stanu $(x_2, x_4, \ldots, x_{n-1})$.

Dla dowolnego n-elementowego ciągu $\mathbf{x} = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ symbolem $\bar{\mathbf{x}}$ będziemy oznaczać $(2n+1)$-elementowy ciąg $(0,x_1,0,x_2,0,\ldots,0,x_n,0)$.

Oznaczmy przez $\mathbf{x}^{n,k,m} = (x_1^{n,k,m}, x_2^{n,k,m}, \ldots, x_n^{n,k,m})$ stan w grze w (n,k)-kamienie po wykonaniu m tur.

Rozważmy grę w $(2n+1,2k)$-kamienie. Mamy $\mathbf{x}^{2n+1,2k,0} = \bar{\mathbf{x}}^{n,k,0}$. Z poprzedniego spostrzeżenia wynika, że dla dowolnego $m \geqslant 0$

$$\mathbf{x}^{2n+1,2k,2m} = \bar{\mathbf{x}}^{n,k,m}.$$

Oznacza to, że gra w $(2n+1,2k)$-kamienie kończy się porażką wtedy i tylko wtedy, gdy gra w (n,k)-kamienie kończy się porażką.

Teraz rozważmy grę w $(2n+1,2k+1)$-kamienie, gdzie $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Zauważmy, że

$$\mathbf{x}^{2n+1,2k+1,1} = \mathbf{x}^{2n+1,2k,0} + \mathbf{x}^{2n+1,2k+2,0} = \bar{\mathbf{x}}^{n,k,0} + \bar{\mathbf{x}}^{n,k+1,0}.$$

Stąd i z wcześniejszego spostrzeżenia wynika, że dla dowolnego m mamy

$$\mathbf{x}^{2n+1,2k+1,2m+1} = \bar{\mathbf{x}}^{n,k,m} + \bar{\mathbf{x}}^{n,k+1,m}.$$

Zauważmy, że wszystkie jedynki w ciągu $\mathbf{x}^{n,k,m}$ stoją na pozycjach różnej parzystości od pozycji wszystkich jedynek w ciągu $\mathbf{x}^{n,k+1,m}$. Wynika to stąd, że tak jest dla $m=0$ oraz parzystość pozycji jedynek w obu ciągach zmienia się na przeciwną gdy zwiększamy m o jeden. W szczególności nie może się zdarzyć, że dla jakichś m i i mamy $x_i^{n,k,m} = 1 = x_i^{n,k+1,m}$. Wobec tego ciąg $\mathbf{x}^{2n+1,2k+1,2m+1}$ jest zerowy wtedy i tylko wtedy gdy oba ciągi $\mathbf{x}^{n,k,m}$, $\mathbf{x}^{n,k+1,m}$ są zerowe. Innymi słowy, gra w $(2n+1, 2k+1)$-kamienie kończy się porażką wtedy i tylko wtedy gdy gra w (n, k)-kamienie i gra w $(n, k+1)$-kamienie kończą się porażką.

Zauważmy wreszcie, że po pierwszej turze w $(2n+1, 1)$-kamienie otrzymujemy pozycję startową gry w $(2n+1, 2)$-kamienie, a po pierwszej turze w $(2n+1, 2n+1)$-kamienie otrzymujemy pozycję startową gry w $(2n+1, 2n)$-kamienie.

Z powyższej dyskusji wynika następujące stwierdzenie:

Stwierdzenie. Niech n będzie liczbą naturalną. Jeżeli dla dowolnego $k = 1, 2, \ldots, n$ gra w (n, k)-kamienie kończy się porażką, to dla dowolnego $k = 1, 2, \ldots, 2n+1$ gra w $(2n+1, k)$-kamienie kończy się porażką. Jeśli natomiast dla dowolnego $k = 1, 2, \ldots, n$ gra w (n, k)-kamienie nigdy nie kończy się porażką, to dla dowolnego $k = 1, 2, \ldots, 2n+1$ gra w $(2n+1, k)$-kamienie też nigdy nie kończy się porażką.

Rozważmy dowolną liczbę całkowitą $n \geqslant 1$. Liczbę $n+1$ można jednoznacznie zapisać w postaci $2^s \cdot t$, gdzie $s \geqslant 0$ jest liczbą całkowitą, a t jest liczbą nieparzystą. Indukcja względem s dowodzi, że gra w (n, k)-kamienie kończy się porażką wtedy i tylko wtedy, gdy $t = 1$. Rzeczywiście, baza indukcji (czyli przypadek $s = 1$ dla $t = 1$ oraz przypadek $s = 0$ dla $t \geqslant 3$) została udowodniona w drugim akapicie rozwiązania. Krok indukcyjny wynika ze stwierdzenia oraz z tożsamości $2^{s+1} \cdot t - 1 = 2 \cdot (2^s \cdot t - 1) + 1$. To prowadzi do odpowiedzi podanej na początku rozwiązania.