LXXIV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia drugiego
10 lutego 2023 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite b o następującej własności: istnieją takie dodatnie liczby całkowite a, k, ℓ, że liczby $a^k + b^\ell$ i $a^\ell + b^k$ są podzielne przez $b^{k+\ell}$, a przy tym $k \neq \ell$.

2. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 2$. Po polach planszy $n \times n$ porusza się ołowiany żołnierzyk, rozpoczynając swój spacer od narożnego pola. Przed wykonaniem kroku na kolejne (sąsiednie) pole, ołowiany żołnierzyk może (ale nie musi) wykonać zwrot w prawo lub w lewo. Wyznaczyć najmniejszą liczbę zwrotów, jakie żołnierzyk musi wykonać, aby odwiedzić każde pole szachownicy co najmniej raz.

Uwaga. Przed rozpoczęciem spaceru plecy żołnierzyka są skierowane w stronę krawędzi planszy.

3. Dane są liczby całkowite k, n oraz liczba rzeczywista ℓ, przy czym $k \geqslant 1$ i $n \geqslant 1$. Dane są też parami różne dodatnie liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Oznaczmy

$$S = \{a_1, a_2, \ldots, a_k, -a_1, -a_2, \ldots, -a_k\}.$$

Niech A będzie liczbą rozwiązań równania

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{2n} = 0,$$

gdzie $x_1, x_2, \ldots, x_{2n} \in S$. Niech B będzie liczbą rozwiązań równania

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{2n} = \ell,$$

gdzie $x_1, x_2, \ldots, x_{2n} \in S$. Dowieść, że $A \geqslant B$.

Uwaga. Rozwiązania równania różniące się wyłącznie kolejnością składników uznajemy za różne.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.

LXXIV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia drugiego
11 lutego 2023 r. (drugi dzień zawodów)

4. Dane są takie parami różne liczby rzeczywiste a, b, c, d, e, że

$$\begin{cases} ab + b = ac + a, \\ bc + c = bd + b, \\ cd + d = ce + c, \\ de + e = da + d. \end{cases}$$

Udowodnić, że $abcde = 1$.

5. Dany jest trójkąt ABC, przy czym $AC < BC$. Okrąg ω wpisany w ten trójkąt jest styczny do boków AB i AC odpowiednio w punktach D i E. Odcinek CD przecina ω w punkcie $K \neq D$. Punkt L jest rzutem prostokątnym punktu A na prostą CD. Punkt M jest środkiem odcinka DE. Punkt H jest ortocentrum trójkąta KLM. Wykazać, że kąt AHK jest prosty.

6. Rozważmy szachownicę $n \times n$, przy czym $n \geqslant 4$ i $p = n + 1$ jest liczbą pierwszą. Zbiór n pól nazwiemy *taktycznym*, jeśli po ustawieniu hetmana na każdym polu z tego zbioru żadne dwa z tych hetmanów nie będą się atakować. Dowieść, że istnieje $n - 2$ taktycznych zbiorów, których suma zawiera wszystkie pola szachownicy leżące poza jej przekątnymi.

Uwaga. Hetman może poruszać się o dowolną liczbę pól poziomo, pionowo i równolegle do przekątnych szachownicy.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.