LXXIV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

10 lutego 2023 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite b o następującej własności: istnieją takie dodatnie liczby całkowite a, k, ℓ, że liczby a^k+b^ℓ i $a^\ell + b^k$ są podzielne przez $b^{k+\ell}$, a przy tym $k \neq \ell$.

Autor zadania: Emil Łasocha

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Jedyną możliwą wartością b jest 1.

Liczba $b = 1$ spełnia warunki zadania dla dowolnego doboru a, k, ℓ. Udowodnimy, że to jedyna możliwa wartość b.

Sposób 1. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $k > \ell$. Z założeń wynika, że liczba

$$a^k + b^\ell - a^{k-\ell}(a^\ell + b^k) = b^\ell - a^{k-\ell}b^k$$

dzieli się przez $b^{k+\ell}$. Zatem liczba $1-a^{k-\ell}b^{k-\ell}$ dzieli się przez b^k. W szczególności dzieli się przez b. W takim razie liczba

$$1 - a^{k-\ell}b^{k-\ell} + b \cdot a^{k-\ell}b^{k-\ell-1} = 1$$

dzieli się przez b. Stąd $b = 1$.

Sposób 2. Bez straty ogólności załóżmy, że $k > \ell$. Z założeń wynika w szczególności, że $a^\ell + b^k$ dzieli się przez b^k, więc przez b^k dzieli się też a^ℓ. Ponieważ $k > \ell$, więc a^ℓ dzieli się przez b^ℓ. Stąd a dzieli się przez b. Wobec tego a^k dzieli się przez b^k, ale z założeń zadania wynika też, że $a^k + b^\ell$ dzieli się przez b^k. W takim razie b^k dzieli b^ℓ. Jest to możliwe tylko gdy $b = 1$, bo w przeciwnym razie $b^k > b^\ell$, a dzielnik danej liczby nie może być od niej większy.

Sposób 3. Rozważmy dowolną liczbę pierwszą p. Załóżmy, że p wchodzi do rozkładu na liczby pierwsze liczb a i b odpowiednio z wykładnikami x i y. Udowodnimy, że $y = 0$. Załóżmy nie wprost, że $y \geqslant 1$. Z podzielności liczby a^k+b^ℓ przez $b^{k+\ell}$ wynika w szczególności, że dzieli się ona przez $p^{y\ell}$. Liczba b^ℓ też się przez nią dzieli, więc $a^k = (a^k + b^\ell) - b^\ell$ również. Z drugiej strony, $a^k + b^\ell$ dzieli się przez $p^{y\ell+1}$, a b^ℓ nie. W takim razie liczba $a^k = (a^k + b^\ell) - b^\ell$ nie dzieli się przez $p^{y\ell+1}$. Wnioskujemy, że p wchodzi do rozkładu na czynniki pierwsze liczby a^k z wykładnikiem $y\ell$. Stąd $xk = y\ell$. Prowadząc analogiczne rozumowanie dla liczby $a^\ell + b^k$ dowodzimy, że $x\ell = yk$. Z otrzymanych równości wynika, że $k = \ell$ wbrew założeniom zadania. Założenie, że $y \geqslant 1$ doprowadziło do sprzeczności. W takim razie $y = 0$ i liczba b nie dzieli się przez p. Wobec dowolności wyboru p oznacza to, że b nie ma dzielników pierwszych. Stąd $b = 1$.

2. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 2$. Po polach planszy $n \times n$ porusza się ołowiany żołnierzyk, rozpoczynając swój spacer od narożnego pola. Przed wykonaniem kroku na kolejne (sąsiednie) pole, ołowiany żołnierzyk może (ale nie musi) wykonać zwrot w prawo lub w lewo. Wyznaczyć najmniejszą liczbę zwrotów, jakie żołnierzyk musi wykonać, aby odwiedzić każde pole szachownicy co najmniej raz.

Uwaga. Przed rozpoczęciem spaceru plecy żołnierzyka są skierowane w stronę krawędzi planszy.

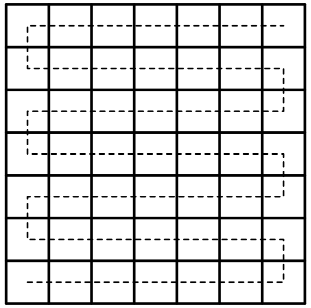
Autorzy zadania: Marta i Michał Strzeleccy

Rozwiązanie:

Odpowiedź: $2n - 2$.

Załóżmy, że żołnierzyk wykonał łącznie $k \leqslant 2n - 3$ zwrotów. Wykażemy, że nie odwiedził któregoś pola. Niech P_0 będzie polem początkowym żołnierzyka, P_{k+1} polem końcowym, a $P_1, P_2, \ldots, P_k$ — kolejnymi polami, na których wykonywane były zwroty. Bez straty ogólności przyjmijmy, że pola P_0 i P_1 leżą w tym samym wierszu planszy. Każda para pól postaci P_{2i}, P_{2i+1} wyznacza pewien wiersz W_i, a każda para pól postaci P_{2i+1}, P_{2i+2} wyznacza pewną kolumnę K_i. Zauważmy, że każde pole odwiedzone przez żołnierzyka znajduje się w pewnym wierszu W_i bądź pewnej kolumnie K_i. Łącznie mamy co najwyżej $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1 \leqslant \lfloor \frac{2n-3}{2} \rfloor + 1 = n - 1$ wierszy W_i oraz co najwyżej $\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor + 1 \leqslant \lfloor \frac{2n-4}{2} \rfloor + 1 = n - 1$ kolumn K_i. Istnieje więc wiersz W różny od wszystkich wierszy $W_0, W_1, \ldots$ oraz kolumna K różna od wszystkich kolumn $K_0, K_1, \ldots$ — pole na przecięciu wiersza W i kolumny K nie zostało odwiedzone przez żołnierzyka.

Wskażemy teraz przykład spaceru, w którym żołnierzyk odwiedza każde pole planszy wykonując dokładnie $2n-2$ zwroty. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że żołnierzyk zaczyna spacer od lewego dolnego rogu i stoi plecami do lewej krawędzi planszy. Żołnierzyk idzie do końca planszy, wykonuje zwrot w lewo, przechodzi na następne pole, ponownie skręca w lewo, idzie do końca planszy, wykonuje zwrot w prawo, przechodzi na następne pole, wykonuje zwrot w prawo, po czym powtarza wszystkie opisane wyżej czynności aż do momentu, gdy odwiedzi wszystkie pola. W ten sposób zwroty wykonywane są wyłącznie na polach przy lewej i prawej krawędzi planszy nie licząc pola startowego i końcowego — łącznie żołnierzyk wykona $2n-2$ zwroty.



3. Dane są liczby całkowite k, n oraz liczba rzeczywista ℓ, przy czym $k \geqslant 1$ i $n \geqslant 1$. Dane są też parami różne dodatnie liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Oznaczmy

$$S = \{a_1, a_2, \ldots, a_k, -a_1, -a_2, \ldots, -a_k\}.$$

Niech A będzie liczbą rozwiązań równania

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{2n} = 0,$$

gdzie $x_1, x_2, \ldots, x_{2n} \in S$. Niech B będzie liczbą rozwiązań równania

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{2n} = \ell,$$

gdzie $x_1, x_2, \ldots, x_{2n} \in S$. Dowieść, że $A \geqslant B$.

Uwaga. Rozwiązania równania różniące się wyłącznie kolejnością składników uznajemy za różne.

Autor zadania: Piotr Nayar

Rozwiązanie:

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej m i dowolnej liczby rzeczywistej t niech $R(m,t)$ oznacza równanie zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_m$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = t,$$

w którym jedynymi dopuszczalnymi wartościami zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_m$ są liczby ze zbioru S. Należy udowodnić, że równanie $R(2n,0)$ ma co najmniej tyle rozwiązań co równanie $R(2n,\ell)$.

Niech T będzie zbiorem wszystkich liczb postaci $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, gdzie $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S$. Zauważmy, że dla dowolnego $t \in T$ liczba rozwiązań równania $R(n,t)$ jest taka sama jak liczba rozwiązań równania $R(n,-t)$. Rzeczywiście, $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = t$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(-x_1)+(-x_2)+\ldots+(-x_n) = -t$. Dla dowolnego $t \in T$ oznaczmy liczbę rozwiązań równania $R(n,t)$ przez C_t.

Jeśli ciąg $(b_1, b_2, \ldots, b_{2n})$ jest rozwiązaniem równania $R(2n,0)$, to dla $t = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ ciąg $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ jest rozwiązaniem równania $R(n,t)$, a ciąg $(b_{n+1}, b_{n+2}, \ldots, b_{2n})$ jest rozwiązaniem równania $R(n,-t)$. Na odwrót — dla dowolnego $t \in T$, dowolnego rozwiązania $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ równania $R(n,t)$ i dowolnego rozwiązania $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ równania $R(n,-t)$ ciąg $(b_1, b_2, \ldots, b_n, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ jest rozwiązaniem równania $R(2n,0)$. Wynika stąd, że

$$A = \sum_{t\in T} C_t C_{-t} = \sum_{t\in T} C_t^2.$$

Niech T' będzie zbiorem złożonym z tych liczb $t \in T$, dla których liczba $\ell - t$ również należy do T. Zauważmy, że $t \in T'$ wtedy i tylko wtedy gdy $\ell - t \in T'$, gdyż $\ell - (\ell - t) = t$. Jeśli ciąg $(b_1, b_2, \ldots, b_{2n})$ jest rozwiązaniem równania $R(2n,\ell)$, to dla $t = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ ciąg $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ jest rozwiązaniem równania $R(n,t)$, a ciąg $(b_{n+1}, b_{n+2}, \ldots, b_{2n})$ jest rozwiązaniem równania $R(n,\ell - t)$ — w szczególności $\ell - t \in T$ i $t \in T'$. Na odwrót, dla dowolnego $t \in T'$, dowolnego rozwiązania $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ równania $R(n,t)$ i dowolnego rozwiązania $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ równania $R(n,\ell - t)$ ciąg $(b_1, b_2, \ldots, b_n, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ jest rozwiązaniem równania $R(2n,\ell)$. Wynika stąd, że

$$B = \sum_{t\in T'} C_t C_{\ell - t}.$$

Z nierówności $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$ prawdziwej dla dowolnych liczb rzeczywistych otrzymujemy zatem

$$2A = 2\sum_{t\in T} C_t^2 \geqslant 2\sum_{t\in T'} C_t^2 = \sum_{t\in T'} \left(C_t^2 + C_{\ell-t}^2\right) \geqslant \sum_{t\in T'} 2C_t C_{\ell-t} = 2B,$$

co dowodzi tezy zadania.

LXXIV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

11 lutego 2023 r. (drugi dzień zawodów)

4. Dane są takie parami różne liczby rzeczywiste a, b, c, d, e, że

$$\begin{cases} ab + b = ac + a, \\ bc + c = bd + b, \\ cd + d = ce + c, \\ de + e = da + d. \end{cases}$$

Udowodnić, że $abcde = 1$.

Autor zadania: Emil Łasocha

Rozwiązanie:

Jeśli $b = 0$, to z drugiego równania wynika, że $c = 0$ wbrew założeniu, że liczby b, c są różne. Zatem $b \neq 0$. Analogicznie dowodzimy, że c i d są niezerowe.

Jeśli $a = -1$, to z pierwszego równania wynika, że $c = -1$, co przeczy założeniu, że $a \neq c$. Zatem $a \neq -1$. Analogicznie dowodzimy, że $c \neq -1$ i $d \neq -1$.

Wyrażenia występujące w zadanych równościach można rozłożyć w następujący sposób:

$$\begin{cases} b(a+1) = a(c+1), \\ c(b+1) = b(d+1), \\ d(c+1) = c(e+1), \\ e(d+1) = d(a+1). \end{cases}$$

Mnożąc stronami zadane równości otrzymujemy

$$b(a+1)c(b+1)d(c+1)e(d+1) = a(c+1)b(d+1)c(e+1)d(a+1).$$

Dzieląc tę równość przez niezerową liczbę $bcd(a+1)(c+1)(d+1)$ otrzymujemy $e(b+1) = a(e+1)$.

Równości dane w treści zadania oraz wyprowadzoną wyżej równość $e(b+1) = a(e+1)$ można przepisać w postaci

$$\begin{cases} a(b-c) = a-b, \\ b(c-d) = b-c, \\ c(d-e) = c-d, \\ d(e-a) = d-e, \\ e(a-b) = e-a. \end{cases}$$

Po wymnożeniu tych związków stronami i skróceniu niezerowego czynnika $(a-b)(b-c)(c-d)(d-e)(e-a)$ otrzymujemy $abcde = 1$.

Uwaga. Przykładowa piątka (a, b, c, d, e) *spełniająca warunki zadania:* $\left(2, -\frac{\sqrt{5}}{3}, -\frac{\sqrt{5}+2}{2}, \frac{\sqrt{5}-5}{10}, \frac{3\sqrt{5}-9}{2}\right)$.

5. Dany jest trójkąt ABC, przy czym $AC < BC$. Okrąg ω wpisany w ten trójkąt jest styczny do boków AB i AC odpowiednio w punktach D i E. Odcinek CD przecina ω w punkcie $K \neq D$. Punkt L jest rzutem prostokątnym punktu A na prostą CD. Punkt M jest środkiem odcinka DE. Punkt H jest ortocentrum trójkąta KLM. Wykazać, że kąt AHK jest prosty.

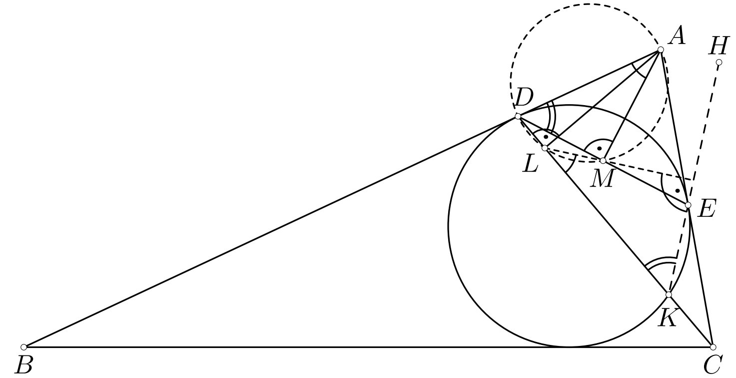
Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Korzystając z równości kąta dopisanego do cięciwy DE okręgu ω i kąta wpisanego opartego na tej cięciwie otrzymujemy $\sphericalangle MDA = \sphericalangle EKD$ oraz $\sphericalangle AEM = \sphericalangle EKD$. Zauważmy, że punkty A, L, D, M leżą na okręgu o średnicy AD. Wobec tego

$$\sphericalangle KLM = \sphericalangle DAM = 90^\circ - \sphericalangle MDA = 90^\circ - \sphericalangle EKD.$$

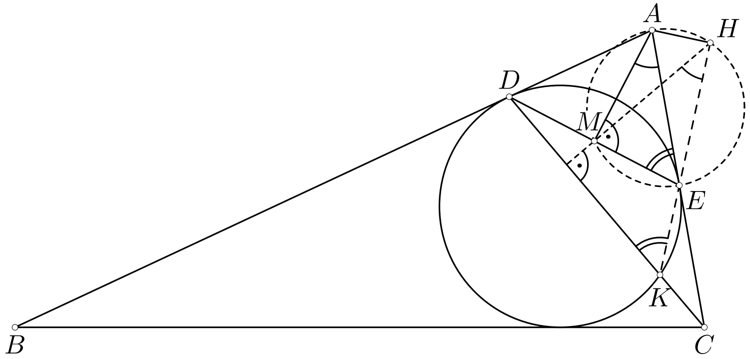
Stąd proste LM i EK są prostopadłe. Zatem H leży na prostej EK.



Zauważmy, że

$$\sphericalangle MHK = 90^\circ - \sphericalangle EKD = 90^\circ - \sphericalangle AEM = \sphericalangle MAE.$$

Ponadto punkty A i H leżą po tej samej stronie prostej EM. Powyższa równość oznacza więc, że punkty A, H, E, M leżą na jednym okręgu. Średnicą tego okręgu jest AE, bo $\sphericalangle EMA = 90^\circ$. Stąd również $\sphericalangle AHK = \sphericalangle AHE = 90^\circ$.



6. Rozważmy szachownicę $n\times n$, przy czym $n \geqslant 4$ i $p = n+1$ jest liczbą pierwszą. Zbiór n pól nazwiemy *taktycznym*, jeśli po ustawieniu hetmana na każdym polu z tego zbioru żadne dwa z tych hetmanów nie będą się atakować. Dowieść, że istnieje $n-2$ taktycznych zbiorów, których suma zawiera wszystkie pola szachownicy leżące poza jej przekątnymi.

Uwaga. Hetman może poruszać się o dowolną liczbę pól poziomo, pionowo i równolegle do przekątnych szachownicy.

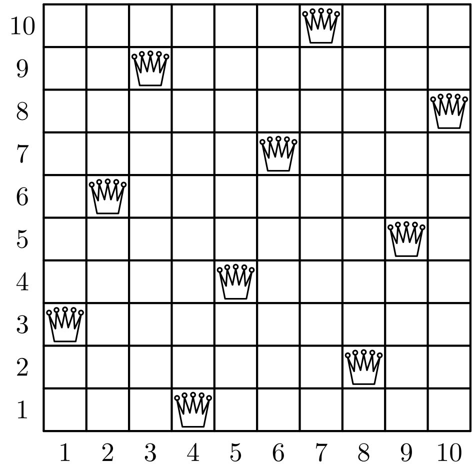
Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Dla dowolnej liczby całkowitej x symbolem $r(x)$ będziemy oznaczać resztę z dzielenia liczby x przez p. Ponumerujmy wiersze i kolumny kolejno liczbami $1, 2, \ldots, n$. Pole w i-tej kolumnie i j-tym wierszu będziemy krótko nazywać *polem* (i, j). Dla dowolnego $a = 2, 3, \ldots, n-1$ zdefiniujmy następujący zbiór pól:

$$X_a = \{(i, r(ai)) \colon i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Następujący rysunek przedstawia zbiór X_3 dla $n = 10$.



Udowodnimy, że zbiory $X_2, X_3, \ldots, X_{n-1}$ spełniają warunki zadania.

Najpierw udowodnimy, że każdy z tych zbiorów jest taktyczny. Ustalmy $a \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$. Jest jasne, że pola ze zbioru X_a leżą w parami różnych kolumnach. Leżą też w parami różnych wierszach — równość $r(ai) = r(aj)$ pociągnęłaby za sobą $ai \equiv aj \pmod{p}$, skąd $i \equiv j \pmod{p}$, co dla różnych $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ nie jest prawdą. Udowodnimy teraz, że żadne dwa pola nie wyznaczają linii równoległej do przekątnej $(1,1)$—(n,n). W przeciwnym razie mielibyśmy $i - j = r(ai) - r(aj)$ dla pewnych $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Wtedy $j - i \equiv aj - ai \pmod{p}$, skąd $a = 1$, gdyż $j - i$ nie dzieli się przez p — sprzeczność, bo $a \in \{2, 3, \ldots, p-2\}$. Podobnie, gdyby dla pewnych $1 \leqslant i < j \leqslant p-1$ pola $(i, r(ai))$, $(j, r(aj))$ wyznaczały linię równoległą do przekątnej $(1, n)$—$(n, 1)$, to mielibyśmy $i + r(ai) = j + r(aj)$. Wtedy $j - i \equiv ai - aj \pmod{p}$. Stąd $a \equiv -1 \pmod{p}$, bo $j - i$ nie dzieli się przez p — sprzeczność, bo $a \in \{2, 3, \ldots, p-2\}$.

Pozostaje wykazać, że zbiory $X_2, \ldots, X_{n-1}$ pokrywają całą szachownicę poza przekątnymi. Rozważmy pole (i, j) nieleżące na żadnej z przekątnych. Wtedy $j \neq i$ oraz $j \neq p - i$. Należy udowodnić, że $j = r(ai)$ dla pewnego $a \in \{2, 3, \ldots, p-2\}$. Ponieważ i nie dzieli się przez p, więc istnieje liczba k niepodzielna przez p taka, że $ik \equiv 1 \pmod{p}$. Wtedy $j \equiv ik \cdot j \equiv r(jk)i \pmod{p}$. Przyjmując $a = r(jk)$ mamy więc $j = r(ai)$ i pozostaje sprawdzić, że $a \neq 1$ i $a \neq p - 1$. Jeśli $a = 1$, to $jk \equiv 1 \equiv ik \pmod{p}$, skąd $j \equiv i \pmod{p}$ i dalej $j = i$ — sprzeczność. Podobnie, jeśli $a = p-1$, to $jk \equiv -1 \equiv -ik \pmod{p}$, skąd $j \equiv -i \pmod{p}$ i dalej $j = p - i$ — sprzeczność. Stąd $a \in \{2, \ldots, p-2\}$, co kończy dowód.