LXXV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego
I seria: do 16 października 2023 r.

1. Dany jest trójkąt ABC. Punkt J jest środkiem okręgu stycznego do boku BC oraz do przedłużeń boków AB i AC. Punkty P, B, C, Q leżą w tej kolejności na jednej prostej, przy czym $PB = AB$ i $QC = AC$. Udowodnić, że $\sphericalangle BAC + \sphericalangle QJP = 180^\circ$.

2. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite x, dla których liczba

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7$$

jest potęgą liczby pierwszej.

3. Liczby rzeczywiste x, y spełniają równość

$$x \cdot \frac{4^x - 2^y}{4^x + 2^y} = y \cdot \frac{4^y - 2^x}{4^y + 2^x}.$$

Dowieść, że $|x| = |y|$.

4. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite n o następującej własności: z n prostokątów o wymiarach

$$1 \times n,\ 2 \times n,\ 3 \times n,\ \ldots,\ n \times n$$

można ułożyć kwadrat.

Uwaga. Prostokąty można obracać, ale nie mogą one na siebie nachodzić.

Rozwiązania powyższych zadań należy — po uprzedniej rejestracji — zamieścić w systemie internetowym olimpiady dostępnym pod adresem `https://om.sem.edu.pl` *najpóźniej dnia*

16 października 2023 r.

Rozwiązania przesłane w późniejszym terminie nie będą rozpatrywane. Każde rozwiązanie należy podpisać na pierwszej jego stronie: imieniem, nazwiskiem, adresem poczty elektronicznej oraz numerem zadania.

LXXV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego
II seria: do 10 listopada 2023 r.

5. Dana jest dodatnia liczba całkowita dająca resztę 3 z dzielenia przez 7. Udowodnić, że suma sześcianów jej dodatnich dzielników dzieli się przez 7.

6. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC = BC > AB$. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Punkt M jest środkiem boku AC. Okrąg opisany na trójkącie AMO przecina odcinek BM w punkcie X różnym od M. Wykazać, że $CX = 2MX$.

7. Dana jest liczba całkowita $n > 1$. W Matlandii znajduje się n^2 miast. Pomiędzy niektórymi miastami istnieją dwukierunkowe połączenia lotnicze. Wiadomo, że z każdego miasta można odbyć podróż samolotem do każdego innego miasta (być może z przesiadkami). Ciąg parami różnych miast $M_1, M_2, \ldots, M_k$ o tej własności, że dla każdego $i = 1, 2, \ldots, k-1$ istnieje bezpośrednie połączenie lotnicze pomiędzy miastami M_i i M_{i+1}, będziemy nazywać *trasą długości* k. Każdemu miastu przypisujemy największą liczbę całkowitą k, taką że istnieje trasa długości k zawierająca to miasto. Dowieść, że pewna liczba została przypisana co najmniej $n\sqrt{2}$ miastom.

8. Znaleźć wszystkie wielomiany W o współczynnikach rzeczywistych mające następującą własność: dla dowolnych $a, b, c > 0$ będących długościami boków pewnego trójkąta i dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z o sumie 0 zachodzi nierówność

$$W(a)yz + W(b)zx + W(c)xy \leqslant 0.$$

Rozwiązania powyższych zadań należy — po uprzedniej rejestracji — zamieścić w systemie internetowym olimpiady dostępnym pod adresem `https://om.sem.edu.pl` *najpóźniej dnia*

10 listopada 2023 r.

Rozwiązania przesłane w późniejszym terminie nie będą rozpatrywane. Każde rozwiązanie należy podpisać na pierwszej jego stronie: imieniem, nazwiskiem, adresem poczty elektronicznej oraz numerem zadania.

LXXV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego
III seria: do 30 listopada 2023 r.

9. Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c spełniających równość $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ zachodzą nierówności

$$2\sqrt{2} \leqslant |a+b+c| + |b+c-a| + |c+a-b| + |a+b-c| \leqslant 4.$$

10. Dana jest dodatnia liczba całkowita n mająca co najmniej dwa różne dzielniki pierwsze większe od 3. Niech $m \geqslant 1$ będzie najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą warunek $\mathrm{NWD}(m(m+2), n) = 1$. Niech p i q będą dwoma największymi dzielnikami pierwszymi liczby n. Udowodnić, że $mpq \leqslant 5n$.

11. *Płytką trójkątną* nazwiemy trójkąt o bokach długości $1, 1, \sqrt{3}$, w którym zaznaczono odcinek łączący środki boków o długości 1. *Płytką sześciokątną* nazwiemy sześciokąt foremny o boku długości 1, w którym zaznaczono trzy odcinki łączące środki sąsiednich boków, tak jak przedstawiono to na rysunku.

Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $n \geqslant 1$ o następującej własności: z $3n$ płytek trójkątnych i $\frac{1}{2}(n-1)n$ płytek sześciokątnych można ułożyć trójkąt równoboczny o boku $n\sqrt{3}$ w taki sposób, aby wszystkie zaznaczone odcinki tworzyły jedną łamaną zamkniętą. Płytki można obracać.

12. Dany jest czworościan $ABCD$ wpisany w sferę s, której środek leży we wnętrzu tego czworościanu. Punkt I jest środkiem sfery wpisanej w czworościan $ABCD$. Udowodnić, że sfera przechodząca przez środki sfer opisanych na czworościanach $IBCD$, $ICDA$, $IDAB$, $IABC$ jest współśrodkowa z s.

Rozwiązania powyższych zadań należy — po uprzedniej rejestracji — zamieścić w systemie internetowym olimpiady dostępnym pod adresem `https://om.sem.edu.pl` *najpóźniej dnia*

30 listopada 2023 r.

Rozwiązania przesłane w późniejszym terminie nie będą rozpatrywane. Każde rozwiązanie należy podpisać na pierwszej jego stronie: imieniem, nazwiskiem, adresem poczty elektronicznej oraz numerem zadania.