LXXV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia drugiego
9 lutego 2024 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba wymierna x_1, że wszystkie wyrazy ciągu $x_1, x_2, \ldots, x_{2024}$ spełniającego warunek

$$x_{n+1} = x_n + \sqrt{x_n^2 - 1} \quad \text{dla } n = 1, 2, \ldots, 2023$$

są większe od 1 i wymierne.

2. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym kąty przy wierzchołkach B i D mają miarę $120°$. Punkt E leży na odcinku AD, przy czym $AE \cdot BC = AB \cdot DE$. Punkt F leży na odcinku BC, przy czym $BF \cdot CD = AD \cdot FC$. Udowodnić, że proste BE i DF są równoległe.

3. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 2$. W Matlandii jest $2n$ miast $M_1, M_2, \ldots, M_{2n}$. Król chce wybudować sieć dróg umożliwiających przejazd z każdego miasta do każdego innego (potencjalnie przejeżdżając przez inne miasta). Obecnie istnieją tylko drogi łączące M_1 z $M_2, M_3, \ldots, M_n$. Koszt budowy nowej drogi pomiędzy miastami M_i, M_j wynosi $k_{i,j} > 0$. Oznaczmy

$$K = \sum_{j=n+1}^{2n} k_{1,j} + \sum_{2 \leqslant i < j \leqslant 2n} k_{i,j}.$$

Udowodnić, że król może zrealizować swój plan kosztem nie większym od $\frac{2K}{3n-1}$.

Uwaga. Wszystkie drogi są dwukierunkowe.

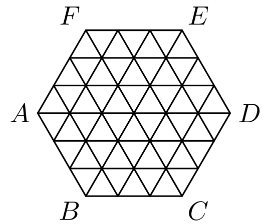
Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.

LXXV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia drugiego
10 lutego 2024 r. (drugi dzień zawodów)

4. Dana jest dodatnia liczba całkowita n. Plansza w kształcie sześciokąta foremnego $ABCDEF$ o boku długości n składa się z $6n^2$ pól w kształcie trójkąta równobocznego o boku 1. (Rysunek przedstawia planszę dla $n = 3$.) Na planszy ustawiono $3n^2$ rombów o boku długości 1 i kątach wewnętrznych $60°$ i $120°$ w taki sposób, że każdy romb całkowicie przykrywa dwa pola planszy i każde pole jest przykryte przez dokładnie jeden romb. Udowodnić, że przekątna AD dzieli na pół dokładnie n rombów.



5. Liczby dodatnie a, b, c, x, y, z spełniają równość

$$5a + 4b + 3c = 5x + 4y + 3z.$$

Udowodnić, że

$$\frac{a^5}{x^4} + \frac{b^4}{y^3} + \frac{c^3}{z^2} \geqslant x + y + z.$$

6. Dana jest liczba pierwsza p. Udowodnić, że liczba

$$p \cdot \left(p^2 \cdot \frac{p^{p-1} - 1}{p - 1}\right)!$$

jest podzielna przez $p! \cdot (p^2)! \cdot (p^3)! \cdot \ldots \cdot (p^{p-1})! \cdot (p^p)!$.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.