LXXVI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia drugiego
14 lutego 2025 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $n \geqslant 2$ o następującej własności: istnieją takie niezerowe liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$, że

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)(x_{k+1} + x_{k+2} + \ldots + x_n) = y$$

dla każdego $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

2. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $n \geqslant 2$ o następującej własności: liczba $2^k \cdot n - 1$ jest pierwsza dla każdego $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$.

3. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ostrokątnego ABC, przy czym kąt BPC jest prosty. Na zewnątrz trójkąta ABC zbudowano trójkąty AQB i ARC, przy czym $\sphericalangle ABQ = \sphericalangle PBC$, $\sphericalangle QAB = \sphericalangle PAC$, $\sphericalangle RCA = \sphericalangle PCB$ oraz $\sphericalangle CAR = \sphericalangle BAP$. Wykazać, że punkty P, Q, R leżą na jednej prostej.

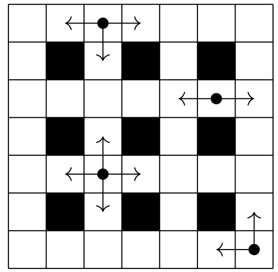
Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.

LXXVI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia drugiego
15 lutego 2025 r. (drugi dzień zawodów)

4. Z planszy $(2n+1) \times (2n+1)$, gdzie $n \geqslant 2$ jest liczbą całkowitą, usunięto pola w parzystych wierszach i kolumnach, otrzymując labirynt (patrz rysunek). Po labiryncie chodzi mrówka, a jej pojedynczy krok polega na przejściu na jedno z sąsiednich pól. Wyznaczyć, w zależności od n, najmniejszą liczbę kroków, które musi wykonać mrówka, aby odwiedzić każde pole labiryntu. Pole startowe wybiera mrówka. Pole startowe i pole końcowe uznajemy za odwiedzone. Pola mogą być odwiedzane wielokrotnie.



Labirynt dla $n = 3$ oraz możliwe kroki mrówki w czterech różnych jej pozycjach.

5. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Okrąg o środku J jest styczny do boku BC w punkcie D, do przedłużenia boku AC w punkcie E i do przedłużenia boku AB w punkcie F. Prosta DE przecina proste CJ i BJ odpowiednio w punktach P i Q. Punkt M jest środkiem odcinka AD. Wykazać, że $PM = QM$.

6. Dane są liczby całkowite $1 \leqslant k \leqslant n$. Załóżmy, że ciąg $a_1, a_2, \ldots, a_n$ spełnia nierówności $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_k$ oraz $0 \leqslant a_n \leqslant a_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant a_k$. Liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ustawiono w kolejności niemalejącej, otrzymując ciąg $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Wykazać, że

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(j-i)^2 a_i a_j \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(j-i)^2 b_i b_j.$$

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.