LXXVI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia trzeciego
2 kwietnia 2025 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Wyznaczyć wszystkie czwórki liczb rzeczywistych (a, b, c, d) spełniające układ równań

$$\begin{cases} a+b+c+d=0 \\ a^2+b^2+c^2+d^2=12 \\ abcd=-3 \end{cases}$$

2. Dane są takie dodatnie liczby całkowite k, m, n, p, że $p = 2^{2^n}+1$, p jest liczbą pierwszą i $2^k - m$ dzieli się przez p. Wykazać, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita ℓ, że liczba $2^\ell - m$ dzieli się przez p^2.

3. Dana jest dodatnia liczba całkowita k oraz k kolorów. Zbiór $2k$ punktów płaszczyzny nazwiemy *barwnym*, jeśli zawiera po dwa punkty każdego koloru oraz odcinki łączące pary punktów tego samego koloru są parami rozłączne. Wyznaczyć, w zależności od k, najmniejszą liczbę całkowitą $n \geqslant 2$ o następującej własności: w każdym zbiorze nk punktów płaszczyzny, z których żadne trzy nie są współliniowe, zawierającym po n punktów każdego koloru istnieje barwny podzbiór.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.

LXXVI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia trzeciego
3 kwietnia 2025 r. (drugi dzień zawodów)

4. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 2$ oraz zbiór S składający się z $2n$ dodatnich liczb całkowitych nie większych od n^2. Udowodnić, że istnieje liczba całkowita $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$, którą można zapisać w postaci $r = a - b$ dla $a, b \in S$ na co najmniej trzy różne sposoby.

5. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ niebędący trapezem wpisany w pewien okrąg i opisany na okręgu ω. Oznaczmy punkty styczności okręgu ω z bokami AB, BC, CD, DA odpowiednio przez K, L, M, N. Okrąg o środku I_K, różny od ω, jest styczny do boku AB i prostych AD i BC. Okrąg o środku I_L, różny od ω, jest styczny do boku BC i prostych AB i CD. Okrąg o środku I_M, różny od ω, jest styczny do boku CD i prostych AD i BC. Okrąg o środku I_N, różny od ω, jest styczny do boku AD i prostych AB i CD. Wykazać, że proste I_KK, I_LL, I_MM, I_NN przecinają się w jednym punkcie.

6. Dana jest malejąca funkcja $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$, która przyjmuje wszystkie dodatnie wartości. Dane są dodatnie liczby $a_1 \neq b_1$. Liczby a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4, $\ldots$ spełniają zależności

$$a_{n+1} = a_n + f(b_n), \qquad b_{n+1} = b_n + f(a_n)$$

dla każdego $n \geqslant 1$. Wykazać, że $|a_n - b_n| > 2025$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej n.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.