LXXVI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

1. Wyznaczyć wszystkie czwórki liczb rzeczywistych (a, b, c, d) spełniające układ równań

$$\begin{cases} a+b+c+d=0 \\ a^2+b^2+c^2+d^2=12 \\ abcd=-3 \end{cases}$$

Autor zadania: Piotr Nayar

Rozwiązanie: Permutowanie zmiennych oraz przemnożenie wszystkich zmiennych przez -1 nie zmienia układu równań. Można więc bez straty ogólności założyć, że co najmniej dwie z liczb a, b, c, d są nieujemne. Z trzeciego równania wynika, że liczby a, b, c, d są niezerowe i dokładnie trzy z nich są dodatnie. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $a, b, c > 0$ i $d < 0$.

Z pierwszego równania wyznaczamy $d = -a-b-c$. Podstawiając wyliczoną wartość do pozostałych dwóch równań otrzymujemy po prostych przekształceniach

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=6 \\ abc(a+b+c)=3 \end{cases}$$

Z równania $abc(a+b+c)=3$ wynika związek $c(a+b+c)=\frac{3}{ab}$. Wobec tego

$$6 = a^2+b^2+ab+c(a+b+c) = a^2+b^2+ab+\frac{3}{ab}.$$

Równoważnie:

$$0 = (a-b)^2 + \frac{3}{ab}\left(ab-1\right)^2,$$

skąd wynika, że $a = b$ i $ab = 1$. Zatem $a = b = 1$. Po podstawieniu do $abc(a+b+c) = 3$ dostajemy $c(c+2) = 3$. Wobec dodatniości liczby c dostajemy $c = 1$. Stąd $d = -a-b-c = -3$. Bezpośrednio sprawdzamy, że otrzymana czwórka spełnia wyjściowy układ równań. Uwzględniając pierwsze zdanie dowodu otrzymujemy pozostałe rozwiązania.

Odpowiedź: Czwórki $(1, 1, 1, -3)$, $(-1, -1, -1, 3)$ oraz ich permutacje.

2. Dane są takie dodatnie liczby całkowite k, m, n, p, że $p = 2^{2^n} + 1$, p jest liczbą pierwszą i $2^k - m$ dzieli się przez p. Wykazać, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita ℓ, że liczba $2^\ell - m$ dzieli się przez p^2.

Autor zadania: Tomasz Kobos

Rozwiązanie: Z postaci liczby p wynika, że $p > 2$ oraz $p \nmid m$ (w przeciwnym razie liczba $p = 2^{2^n} + 1$ byłaby dzielnikiem liczby 2^k, co nie jest możliwe, bo jedynym dzielnikiem pierwszym liczby 2^k jest 2). Stąd $\mathrm{NWD}(p, 2m) = 1$, co oznacza, że istnieje dodatnia liczba całkowita s spełniająca kongruencję $2ms \equiv 1 \pmod{p}$.

Z założenia wynika, że $2^k \equiv bp + m \pmod{p^2}$ dla pewnej nieujemnej liczby całkowitej b. Udowodnimy, że liczba $\ell = k + 2^{n+1} \cdot bs$ spełnia warunki zadania. Jest to jasne, gdy $b = 0$. Dla $b \geqslant 1$ mamy

$$2^{2^{n+1} \cdot bs} = (p-1)^{2bs} = 1 - 2bsp + \sum_{i=2}^{2bs} \binom{2bs}{i} p^i (-1)^{2bs-i} \equiv 1 - 2bsp \pmod{p^2}.$$

Wobec tego

$$2^\ell = 2^k \cdot 2^{2^{n+1} \cdot t} \equiv (bp + m)(1 - 2bsp) \equiv m + pb(1 - 2ms) \equiv m \pmod{p^2}$$

— ostatnia kongruencja wynika z tego, że liczba $1 - 2ms$ dzieli się przez p.

3. Dana jest dodatnia liczba całkowita k oraz k kolorów. Zbiór $2k$ punktów płaszczyzny nazwiemy *barwnym*, jeśli zawiera po dwa punkty każdego koloru oraz odcinki łączące pary punktów tego samego koloru są parami rozłączne. Wyznaczyć, w zależności od k, najmniejszą liczbę całkowitą $n \geqslant 2$ o następującej własności: w każdym zbiorze nk punktów płaszczyzny, z których żadne trzy nie są współliniowe, zawierającym po n punktów każdego koloru istnieje barwny podzbiór.

Autor zadania: Łukasz Bożyk

Rozwiązanie: Rozszerzamy pojęcie zbiorów barwnych do sytuacji ogólniejszej, w której do dyspozycji jest ℓ kolorów. Zbiór 2ℓ punktów płaszczyzny nazwiemy *ℓ-barwnym*, jeśli zawiera po dwa punkty każdego koloru oraz odcinki łączące pary punktów tego samego koloru są parami rozłączne.

Stwierdzenie. Niech $1 \leqslant n \leqslant k$. Rozważmy zbiór S złożony z nk punktów A_1, A_2, …, A_{nk} leżących na jednym okręgu w tej kolejności. Dla każdego i punkt

A_i kolorujemy na kolor $r(i)$, gdzie $r(i)$ oznacza resztę z dzielenia i przez k. Wówczas nie istnieje k-barwny podzbiór zbioru S.

Dowód stwierdzenia. Indukcja po k. Dla $k = 1$ mamy $n = 1$ i teza stwierdzenia jest oczywista — zbiór S składa się tylko z jednego punktu, a 1-barwny zbiór powinien zawierać dwa punkty.

Ustalmy $1 \leqslant n \leqslant k$, przy czym $k \geqslant 2$. Załóżmy, że dla wszystkich $1 \leqslant n' \leqslant k-1$ teza stwierdzenia dla pary $(n', k-1)$ jest prawdziwa. Udowodnimy, że jest też prawdziwa dla pary (n, k). Załóżmy nie wprost, że B jest k-barwnym podzbiorem zbioru S i narysujmy k odcinków łączących punkty ze zbioru B tego samego koloru. Ponieważ punkty ze zbioru S są wierzchołkami wielokąta wypukłego, i żadne dwa narysowane odcinki się nie przecinają, więc któryś z narysowanych odcinków wyznacza taką prostą, że wszystkie pozostałe punkty zbioru S leżą po tej samej stronie tej prostej. Zmieńmy numerację punktów w taki sposób, by odcinkiem o opisanej własności był $A_{sk}A_{nk}$ dla pewnego s, a pozostałe punkty ze zbioru S miały indeksy mniejsze od sk. Zbiór $B' = B \setminus \{A_{sk}, A_{nk}\}$ jest $(k-1)$-barwny. Rozważmy zbiór $S' = \{A_1, A_2, \ldots, A_{sk}\} \setminus \{A_k, A_{2k}, \ldots, A_{sk}\}$. Zbiór S' składa się z $s(k-1)$ punktów pokolorowanych na $k-1$ kolorów, po s punktów w każdym kolorze, przy czym kolorowanie spełnia założenia stwierdzenia przy (n, k) zastąpionym przez $(s, k-1)$. Z założenia indukcyjnego wynika więc, że S' nie zawiera $(k-1)$-barwnego podzbioru — otrzymana sprzeczność kończy dowód stwierdzenia. $\square$

Ze stwierdzenia wynika w szczególności, że liczby n nie większe od k nie mają żądanej własności. Teraz udowodnimy, że $n = k+1$ ma żądaną własność.

Rozważmy zbiór S złożony z $k(k+1)$ punktów na płaszczyźnie, po $k+1$ punktów w każdym kolorze, przy czym żadne trzy z nich nie leżą na jednej prostej. Wprowadźmy układ współrzędnych w taki sposób, że odcięte punktów ze zbioru S są parami różne. Punkty ze zbioru S o kolorze i oznaczamy przez $A_{i,j} = (x_{i,j}, y_{i,j})$ dla $1 \leqslant j \leqslant k+1$. Numerację ustalamy tak, że dla każdego i i każdych $j < j'$ mamy $x_{i,j} < x_{i,j'}$. Niech i_1 będzie tym kolorem, dla którego liczba $x_{i_1,2}$ jest najmniejsza i narysujmy odcinek $A_{i_1,1}A_{i_1,2}$. Niech i_2 będzie tym kolorem spośród kolorów różnych od i_1, dla którego liczba $x_{i_2,3}$ jest najmniejsza. Narysujmy odcinek $A_{i_2,2}A_{i_2,3}$. Procedurę kontynuujemy: w s-tym kroku znajdujemy kolor i_s, dla którego

$$x_{i_s,s+1} = \min\{x_{i,s+1} \colon i \neq i_t \text{ dla każdego } t < s\}$$

i rysujemy odcinek $A_{i_s,s}A_{i_s,s+1}$. Procedurę kończymy po wyczerpaniu wszystkich k kolorów. W ten sposób narysowaliśmy k odcinków, każdy z nich łączy punkty jednego koloru, i dla każdych dwóch odcinków kolory te są różne. Żadne dwa narysowane odcinki nie przecinają się, bo kolejne kolory dobrane zostały tak, że

$$x_{i_1,1} < x_{i_1,2} < x_{i_2,2} < x_{i_2,3} < x_{i_3,3} < x_{i_3,4} < \ldots < x_{i_{k-1},k} < x_{i_k,k} < x_{i_k,k+1}.$$

Zatem zbiór $\{A_{i_1,1}, A_{i_1,2}, A_{i_2,2}, A_{i_2,3}, \ldots, A_{i_k,k}, A_{i_k,k+1}\}$ jest barwnym podzbiorem zbioru S.

Odpowiedź: Najmniejszym takim n jest $n = k + 1$.

LXXVI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

4. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 2$ oraz zbiór S składający się z $2n$ dodatnich liczb całkowitych nie większych od n^2. Udowodnić, że istnieje liczba całkowita $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$, którą można zapisać w postaci $r = a - b$ dla $a, b \in S$ na co najmniej trzy różne sposoby.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie: Oznaczmy przez $s_1, s_2, \ldots, s_{2n}$ elementy zbioru S, przy czym $s_1 < s_2 < \ldots < s_{2n}$. Wykażemy, że istnieje taka liczba $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$, że co najmniej trzy z następujących różnic

$$s_2 - s_1,\ s_3 - s_2,\ \ldots,\ s_{2n} - s_{2n-1}$$

są równe r.

Załóżmy przeciwnie: każda z liczb $1, 2, \ldots, n$ występuje wśród powyższych różnic co najwyżej dwa razy. Z jednej strony

$$\sum_{k=1}^{2n-1} (s_{k+1} - s_k) \geqslant 1 + 1 + 2 + 2 + \ldots + (n-1) + (n-1) + n = n^2.$$

Z drugiej strony, skoro $1 \leqslant s_1$ i $s_{2n} \leqslant n^2$,

$$\sum_{k=1}^{2n-1} (s_{k+1} - s_k) = s_{2n} - s_1 \leqslant n^2 - 1.$$

Otrzymane nierówności prowadzą do sprzeczności.

5. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ niebędący trapezem wpisany w pewien okrąg i opisany na okręgu ω. Oznaczmy punkty styczności okręgu ω z bokami AB, BC, CD, DA odpowiednio przez K, L, M, N. Okrąg o środku I_K, różny od ω, jest styczny do boku AB i prostych AD i BC. Okrąg o środku I_L, różny od ω, jest styczny do boku BC i prostych AB i CD. Okrąg o środku I_M, różny od ω, jest styczny do boku CD i prostych AD i

BC. Okrąg o środku I_N, różny od ω, jest styczny do boku AD i prostych AB i CD. Wykazać, że proste $I_K K$, $I_L L$, $I_M M$, $I_N N$ przecinają się w jednym punkcie.

Autor zadania: Michał Kieza

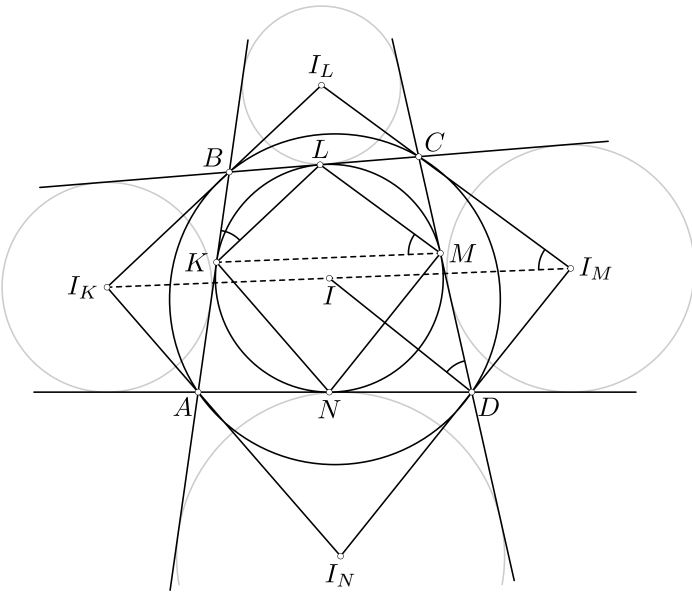
Rozwiązanie: Oznaczmy środek okręgu ω przez I. Punkty I_K, I, I_M są współliniowe, bo leżą na dwusiecznej kąta między prostymi AD i BC. Zauważmy, że proste KL i $I_K I_L$ są równoległe, bo obie są prostopadłe do prostej BI. Analogicznie $LM \parallel I_L I_M$, $MN \parallel I_M I_N$, $NK \parallel I_N I_K$.

Skoro proste CI i CI_M są prostopadłe, to C leży na okręgu o średnicy II_M. Analogicznie D też leży na tym okręgu. Mamy więc

$$\sphericalangle CI_M I = \sphericalangle CDI = \frac{1}{2}\sphericalangle CDA = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle ABC) = \sphericalangle LKB = \sphericalangle LMK,$$

przy czym kolejne równości biorą się z:

- współokręgowości punktów C, I_M, D, I,
- tego, że DI jest dwusieczną kąta CDA,
- współokręgowości punktów A, B, C, D,
- równoramienności trójkąta BKL,
- zależności między kątem dopisanym i kątem wpisanym.



Otrzymana równość wraz z równoległością $LM \parallel I_L I_M$ implikuje, że $KM \parallel II_M$. Z wszystkich otrzymanych równoległości wynika, że czworokąty $KLMN$ i $I_K I_L I_M I_N$ są jednokładne lub jeden z drugiego powstaje przez przesunięcie o wektor. Druga opcja jednak odpada, bo skala podobieństwa czworokątów $KLMN$ i $I_K I_L I_M I_N$ jest różna od 1, gdyż $KLMN$ całkowicie zawiera się wewnątrz $I_K I_L I_M I_N$. Wykazaliśmy więc, że proste $I_K K$, $I_L L$, $I_M M$, $I_N N$ przecinają się w jednym punkcie — środku jednokładności przekształcającej $KLMN$ na $I_K I_L I_M I_N$.

6. Dana jest malejąca funkcja $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$, która przyjmuje wszystkie dodatnie wartości. Dane są dodatnie liczby $a_1 \neq b_1$. Liczby a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4, ... spełniają zależności

$$a_{n+1} = a_n + f(b_n), \qquad b_{n+1} = b_n + f(a_n)$$

dla każdego $n \geqslant 1$. Wykazać, że $|a_n - b_n| > 2025$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej n.

Autor zadania: Daniel Goc

Rozwiązanie: Jeśli ciąg $a_1, a_2, \ldots$ jest ograniczony z góry, to istnieje $M > 0$, takie że $a_n < M$ dla każdego n. Wtedy $b_{n+1} = b_n + f(a_n) > b_n + f(M)$ dla dowolnego n, skąd otrzymujemy $b_{n+1} > b_1 + nf(M)$. Wtedy dla dostatecznie dużego n mamy $b_n > 2025 + M$, skąd $|a_n - b_n| > 2025$. Analogicznie rozumujemy, gdy ciąg $b_1, b_2, \ldots$ jest ograniczony z góry.

Do rozważenia pozostaje przypadek, gdy oba ciągi są nieograniczone z góry. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $a_1 > b_1$. Zdefiniujmy $c_n = a_n - b_n$ dla dowolnego $n \geqslant 1$. Oznaczmy $d = \frac{1}{3}(a_1 - b_1)$. Zauważmy, że $a_1 < a_2 < \ldots$ i $b_1 < b_2 < \ldots$, a ponadto dla dowolnego n mamy

$$c_{n+1} = c_n + f(b_n) - f(a_n) > c_n,$$

skąd wynika, że $c_n > c_1 = 3d$ dla dowolnego $n \geqslant 1$.

Lemat 1. Jeśli $m \geqslant n$ i $b_m < a_n$, to $b_{m+1} < a_{n+1}$.

Dowód lematu 1. Mamy $b_n < a_n \leqslant a_m$, więc $f(a_m) < f(b_n)$. Stąd i z założenia $b_m < a_n$ dostajemy $b_{m+1} = b_m + f(a_m) < a_n + f(b_n) = a_{n+1}$. $\square$

Ustalmy liczbę całkowitą N tak dużą, że $f(b_N) < d$. Wówczas $f(a_n) < d$ i $f(b_n) < d$ dla dowolnego $n \geqslant N$.

Lemat 2. Dla każdego $n \geqslant N$ istnieje $m \geqslant n$, takie że $c_m > c_n + d$.

Dowód lematu 2. Ustalmy $n \geqslant N$. Niech ℓ będzie największą liczbą całkowitą spełniającą nierówność $b_{n+\ell} < a_n$. Wtedy $a_n - b_{n+\ell} \leqslant d$, bo w przeciwnym razie mielibyśmy $b_{n+\ell+1} = b_{n+\ell} + f(a_{n+\ell}) < b_{n+\ell} + d < a_n$ wbrew wyborowi ℓ. Z lematu 1. dostajemy przez prostą indukcję $a_j > b_{j+\ell}$ dla dowolnego $j \geqslant n$. W konsekwencji $f(a_j) < f(b_{j+\ell})$ dla dowolnego $j \geqslant n$.

Zauważmy, że dla dowolnego $m > n + \ell$ mamy

$$c_m = c_n + \sum_{j=n}^{m-1} (f(b_j) - f(a_j)) = c_n + A + B - C,$$

gdzie

$$A = \sum_{j=n}^{n+\ell-1} f(b_j), \quad B = \sum_{j=n}^{m-\ell-1} (f(b_{j+\ell}) - f(a_j)), \quad C = \sum_{j=m-\ell}^{m-1} f(a_j).$$

Zauważmy, że

$$A = a_{n+\ell} - a_n \geqslant a_{n+\ell} - b_{n+\ell} - d = c_{n+\ell} - d > c_1 - d = 2d.$$

Ponadto $B > 0$, bo każdy składnik sumy we wzorze definiującym B jest dodatni. Wybierzmy liczbę m tak dużą, że $f(a_{m-\ell}) < \frac{d}{\ell}$. Mamy

$$C < \ell \cdot f(a_{m-\ell}) < d.$$

W takim razie $A + B - C > 2d + 0 - d = d$, co kończy dowód lematu. $\square$

Sukcesywnie stosujemy Lemat 2. i otrzymujemy rosnący ciąg indeksów $N = m_0, m_1, m_2, \ldots$, taki że $c_{m_{j+1}} > c_{m_j} + d$ dla dowolnego $j \geqslant 0$. Wynika stąd, że $c_{m_j} > c_N + jd$ dla dowolnego j. Jeżeli więc $j > \frac{2025}{d}$, to

$$c_{m_j} > c_N + jd > 2025.$$